

LEANDRO ALVES DA SILVA

**Melhorias no desempenho do gráfico de
controle por atributos np_x**

São Paulo

2021

LEANDRO ALVES DA SILVA

Melhorias no desempenho do gráfico de controle por atributos np_x

Versão original

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Ciências

Área de Concentração: Engenharia de Produção

Orientador: Profa. Dra. Linda Lee Ho

São Paulo

2021

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte

Silva, Leandro Alves da
Melhorias no desempenho do gráfico de controle por atributos np_x / LEANDRO
ALVES DA SILVA. – São Paulo, 2021-
49 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Profa. Dra. Linda Lee Ho

Dissertação (Mestrado) – UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA POLITÉCNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO,
2021.

1. Gráfico de controle. 2. Inspeção por Atributos e Variável. 3. Monitoramento da Média do Processo 4. Monitoramento da Variância do Processo 5. Amostra de tamanho variável. I. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo II. Engenharia de Produção.

CDU XX:XX:XXX.X

Agradecimentos

À Prof^ª. Dr^ª. Linda Lee Ho, por todo apoio, dedicação, incentivo e orientação durante toda a jornada e desenvolvimento deste projeto.

Ao Prof. Dr. Roberto Costa Quinino e ao Prof. Dr. Marcelo Bourguignon Pereira, pelas sugestões e críticas dadas durante a Banca de Qualificação.

À minha esposa Claudilene, por todo o incentivo, apoio e compreensão pelo tempo que tenho dedicado a este trabalho.

À minha família e amigos pelas diversas palavras de incentivo e a confiança de que eu concluiria este projeto.

À Deus, simplesmente pelo dom da VIDA.

"Não existe nada permanente, exceto a mudança."
(Heráclito)

Resumo

SILVA, L. A. **Melhorias no desempenho do gráfico de controle por atributos np_x** . 2021. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2021.

Métodos de controle operacionalmente mais simples, com menor custo e consumo de tempo reduzido são desejados pela maioria dos praticantes do gerenciamento de produção e melhoria da qualidade. Dentre as ferramentas amplamente adotadas estão os gráficos de controle. O gráfico de controle por atributos np_x é baseado em inspeções por atributos de uma amostra de tamanho fixo n . Seu procedimento consiste em classificar os itens em aprovados ou não de acordo com um limite discriminante para monitorar a média do processo. Por apresentar bom desempenho, é visto como uma alternativa ao uso do gráfico de controle \bar{X} tradicional. Motivado pela sua simplicidade e bom desempenho, é proposta a utilização do gráfico np_x para monitorar a variância do processo, que doravante será denominado $np_x^{\sigma^2}$ cujos resultados são descritos neste trabalho. Inspirado por tais resultados e, como uma forma de aprofundar o assunto, também está apresentado neste trabalho um procedimento com o objetivo de produzir uma melhoria (em termos de velocidade de detecção de anomalias / mudanças) no gráfico por atributos np_x ao monitorar (separadamente) a média (doravante denominado de gráfico de controle $np_{x(I)}^{\mu}$) e a variância (doravante chamado de gráfico de controle $np_{x(I)}^{\sigma^2}$) de uma variável (X) em um processo. Este procedimento utiliza tamanhos de amostra sequenciais de n_a, n_b com $n_a > n_b$. Cada item é classificado em aprovado ou não de acordo com um limite discriminante ($z_k, k = a, b$) usando um dispositivo GO/NO GO. No final, teremos Y_a e Y_b itens classificados como não aprovados. Sempre que $Y_a > UCL_{n_a}$ ou $Y_b > UCL_{n_b}$, o processo é considerado fora de controle e após ajustes no processo, a inspeção é sempre reiniciada com uma amostra de tamanho n_a . Os parâmetros utilizados na construção dos gráficos $np_x^{\sigma^2}$, $np_{x(I)}^{\mu}$ e $np_{x(I)}^{\sigma^2}$, foram obtidos por meio de uma busca por valores que otimizem seus desempenhos, de modo que o gráfico $np_x^{\sigma^2}$ pode competir com o gráfico de controle S^2 , o gráfico $np_{x(I)}^{\mu}$ compete com os gráficos de controle np_x e \bar{X} tradicional e, o gráfico de controle $np_{x(I)}^{\sigma^2}$ pode competir com os gráficos de controle $np_x^{\sigma^2}$ e S^2 . Exemplos numéricos são apresentados como ilustração dessas propostas.

Palavras-chaves: Gráfico de controle. Inspeção por Atributos e Variável. Monitoramento da Média do Processo. Monitoramento da Variância do Processo. Amostra de tamanho variável.

Abstract

SILVA, L. A. **Improvements of performance of attribute np_x control chart.** 2021. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2021.

Operationally simpler control methods, with lower cost and reduced time consuming are desired by most practitioners of production management and quality improvement. Among the widely adopted tools are the control charts. The np_x attribute control chart is based on attribute inspections of a fixed-size sample n . Its procedure consists of classifying the items as approved or not according to a discriminant limit to monitor the process mean. Due to its good performance, it is seen as an alternative to the traditional \bar{X} control chart. Motivated by its simplicity and good performance, it is extended the use of the np_x control chart to monitor the process variance, hereon referred as $np_x^{\sigma^2}$ which results are described in this work. Inspired by such results and, as a way to deepen the subject, a procedure is also presented in this work with the objective to yield an improvement (in terms of speed of detection of anomalies / changes) in the attribute np_x control chart in monitoring (separately) the mean (hereon referred as $np_{x(I)}^{\mu}$ control chart) and the variance (referred as $np_{x(I)}^{\sigma^2}$ control chart) of a variable (X) in a process. Such scheme uses sequential sample sizes of n_a, n_b with $n_a > n_b$. Each item is classified as approved or not according to a discriminant limit ($z_k, k = a, b$) using a GO/NO GO device. At the end, we have Y_a and Y_b items classified as not approved. Whenever $Y_a > UCL_{n_a}$ or $Y_b > UCL_{n_b}$, the process is considered out of control and after adjustments to the process, the inspection is always restarted with a sample of size n_a . The parameters used in the construction of $np_x^{\sigma^2}$, $np_{x(I)}^{\mu}$ and $np_{x(I)}^{\sigma^2}$ control charts, were obtained through a search for values that optimize their performances, such that the $np_x^{\sigma^2}$ chart can compete with the S^2 control chart, the $np_{x(I)}^{\mu}$ chart competes with the “standard np_x ” control chart and traditional \bar{X} control chart and, the $np_{x(I)}^{\sigma^2}$ control chart can compete with the $np_x^{\sigma^2}$ and S^2 control charts. Empirical examples are shown as illustration of these proposals.

Key-words: Control Chart. Variable and Attribute Inspection. Monitoring the Process Mean. Monitoring the Process Variance. Variable Sample Size.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Dispositivo GO/NO GO (Source: Sampaio, Ho e Medeiros (2013) A Combined $np_x - \bar{X}$ Control Chart to Monitor the Process Mean in a Two-Stage Sampling. Quality and Reliability Engineering International)	13
Figura 2 – Procedimento de inspeção do gráfico de controle por atributos $np_{x(I)}^\mu$. Fonte: Autor	25
Figura 3 – Um exemplo do gráfico de controle $np_{x(I)}^\mu$. Fonte: Autor	25

Lista de tabelas

Tabela 1	–	Comparação do desempenho - valores de ARL dos gráficos de controle: S^2 versus $np_x^{\sigma^2}$ - $n_{S^2} = 3, 4, 5, 6$	23
Tabela 2	–	Comparação do desempenho (em termos de ARL) dos gráficos de controle: np_x e $np_{x(I)}^{\mu}$	29
Tabela 3	–	Valores de ARL_1 dos gráficos de controle: \bar{X} , np_x e $np_{x(I)}^{\mu}$ - Casos 1, 2, 3, 4, 5 e 6: $n_{\bar{X}} = 3, 6, 9$	31
Tabela 4	–	Configurações adicionais do gráfico $np_{x(I)}^{\mu}$ para $\delta = 0.25, 0.50, 0.75$. . .	32
Tabela 5	–	Avaliação e decisão das amostras com uso do gráfico $np_{x(I)}^{\mu}$	33
Tabela 6	–	Comparação do desempenho dos gráficos de controle: S^2 , $np_x^{\sigma^2}$ e $np_{x(I)}^{\sigma^2}$	37
Tabela 7	–	Comparando gráficos de controle para monitorar a variância	37
Tabela 8	–	Avaliação e decisão das amostras com uso do gráfico $np_{x(I)}^{\sigma^2}$	38

Sumário

1	Introdução	10
1.1	Objetivo	11
1.2	Revisão Bibliográfica	12
2	O Gráfico por atributos $np_x^{\sigma^2}$ no monitoramento da variância	19
2.1	O gráfico de controle np_x e sua extensão para monitorar a variância através do gráfico por atributos $np_x^{\sigma^2}$	19
2.2	O desempenho do gráfico de controle $np_x^{\sigma^2}$ no monitoramento da variância	22
3	Gráfico por atributos $np_{x(I)}^{\mu}$ para monitorar a média	24
3.1	O desempenho do Gráfico de Controle $np_{x(I)}^{\mu}$	28
3.2	Exemplo numérico - $np_{x(I)}^{\mu}$	32
4	Procedimento para o Gráfico de Controle $np_{x(I)}^{\sigma^2}$ no monitoramento da variância	34
4.1	O desempenho do Gráfico de Controle $np_{x(I)}^{\sigma^2}$	35
4.2	Exemplo numérico - $np_{x(I)}^{\sigma^2}$	36
5	Conclusão	39
	Referências	41
	Apêndices	43

1 Introdução

A busca por eficácia e controle nas operações tem sido tema constantemente discutido em diversas organizações. Assim, a função qualidade é uma característica que tem se destacado nos produtos e serviços como parâmetro para a tomada de decisão.

Slack, Chambers e Johnston (2002) mencionam que qualquer operação produz bens, serviços ou uma mistura de ambos, e o faz por meio de um processo, e que este por sua vez faz uso de recursos, transformando entradas (matérias-primas e/ou recursos necessários para iniciar o processo) em saídas. Essas saídas representam os resultados obtidos após a conclusão do processo de transformação.

No esforço de aprimorar suas operações as organizações utilizam ferramentas para verificar os resultados dos processos, dentre elas uma importante ferramenta são os gráficos de controle. Muitas organizações têm adotado representações numéricas para verificar a característica de qualidade, porém há casos em que isso não é conveniente. Nesses casos, normalmente opta-se por classificar cada item em conforme ou não conforme, essas características de qualidade são chamadas de atributos.

Os gráficos por atributos p e np são usados para monitorar a fração não conforme. Nos gráficos de controle p e np tradicionais, um item é classificado em conforme se o item inspecionado satisfizer um conjunto de requisitos estabelecidos pela equipe de engenharia, por exemplo, tais como os limites de especificação; caso contrário, o item é classificado em não conforme. No entanto, a velocidade de detecção de um caso anormal desses gráficos (gráficos p ou np) para monitorar a média do processo não apresenta um bom desempenho, necessitando de uma amostra cerca de nove vezes maior do que a usada para gráfico \bar{X} como afirma Montgomery (2009).

O gráfico \bar{X} tradicional de Shewhart é amplamente utilizado, devido ao seu funcionamento e simplicidade operacional (COSTA, 1994). O uso de gráfico de controle por atributos para monitorar a média traz inúmeras vantagens quanto ao custo, tempo e simplicidade, em especial nos casos onde são utilizados ensaios destrutivos.

Para os casos em que se deseja monitorar a variância de uma característica de qualidade, o gráfico de controle S^2 é uma alternativa, sendo muito empregado, mas por se tratar de um gráfico de controle por variáveis, este requer mais tempo, treinamento e conseqüentemente propicia maiores custos.

Contudo, diversos estudos têm sido desenvolvidos na proposição de novas estratégias de monitoramento que possam proporcionar gráficos com melhor desempenho.

Tal oportunidade apresentada e a relevância que o tema possui na academia e

organizações são parte dos fatores que impulsionam esta pesquisa que tem o propósito de responder às seguintes questões de pesquisa:

- “A utilização do gráfico de controle por atributos np_x no monitoramento de mudanças na variância de uma variável aleatória (X) pode fornecer um desempenho capaz de competir com o gráfico de controle por variáveis S^2 ?”;
- “A aplicação de gráficos de controle que utilizem um esquema simplificado de tamanho de amostra variado pode melhorar o desempenho de um gráfico de controle por atributos para o monitoramento de mudanças (individuais) na média e na variância de uma variável aleatória (X)?”.

O presente trabalho propõe inicialmente o uso do procedimento aplicado ao gráfico de controle por atributos np_x (WU et al., 2009) para monitoramento de mudanças da variância de um processo e, adicionalmente melhorias no desempenho do gráfico de controle np_x no monitoramento da média e variância do processo.

Após este capítulo introdutório, o gráfico $np_x^{\sigma^2}$ e seu desempenho são apresentados no Capítulo 2. No Capítulo 3, o gráfico de controle $np_{x(I)}^{\mu}$ é proposto e seu desempenho avaliado. Neste capítulo está incluído um exemplo numérico para ilustrar a proposição. No capítulo 4, o gráfico de controle $np_{x(I)}^{\sigma^2}$ é introduzido para o monitoramento da variância do processo e seu desempenho avaliado. Também está incluído um exemplo numérico para ilustrar um caso prático e finalmente o capítulo 5 fornece as conclusões deste trabalho.

Os resultados obtidos foram parcialmente apresentados, isso porque o desenvolvimento desta dissertação propiciou a produção de trabalhos aceitos em congressos nacionais e internacionais (Apêndices A, B, C e D), bem como 2 artigos submetidos (apêndices E e F).

1.1 Objetivo

O objetivo deste trabalho é propor uma extensão do uso do gráfico de controle por atributos np_x (WU et al., 2009) (originalmente aplicado para monitorar o valor médio de uma característica de qualidade) no monitoramento da variância do processo.

Além disso, o trabalho sugere o uso de um esquema simplificado de amostras sequenciais de tamanho variado para monitorar (individualmente) a média e a variância de uma característica de qualidade de interesse (X), de modo que , fornece um desempenho capaz de competir com os gráficos de controle tradicionais \bar{X} e S^2 , ao monitorarmos a média e variância, respectivamente. Neste trabalho, alguns pressupostos são assumidos

como a característica de qualidade de interesse segue uma distribuição Normal, com média μ_0 e desvio padrão σ_0 conhecidos, e observações independentes são coletadas.

1.2 Revisão Bibliográfica

Para se manterem competitivas em suas áreas de atuação, as organizações necessitam empregar esforços no desenvolvimento de processos que forneçam resultados previsíveis, dadas as especificações e exigências do mercado. O emprego de meios estruturados de controle dos resultados, bem como seu desempenho requer a aplicação de métodos de monitoramento nos processos e estratégias de inspeção viáveis a este contexto. Conforme afirma [Montgomery \(2009\)](#), temos no Controle Estatístico do Processo uma ferramenta poderosa, que apresenta ampla diversidade de técnicas para coleta, análise e interpretação de dados para monitoramento e melhoria de processos. Com referência à diversidade de tais processos e a relevância dos métodos empregados para o seu acompanhamento e controle, recursos como os gráficos de controle são fundamentais para a manutenção do monitoramento do status dos processos, assim a discussão referente a novas propostas para o monitoramento de processos, por meio de controles com esquemas simplificados, que proporcionem um bom desempenho, mais rapidez e menores custos tornam-se um aspecto essencial na tomada de decisão de quais tipos de controles devem ser adotados.

[Wu et al. \(2009\)](#) propuseram um gráfico de controle baseado em atributos (os itens são classificados e aprovados ou não segundo os limites de advertência) chamado np_x , com a finalidade de monitorar a média do processo. O procedimento consiste em classificar cada item de uma amostra de tamanho fixo n em aprovado ou não de acordo um limite discriminante w com o uso de um dispositivo tipo “Go/No Go”. A Figura 1 mostra um exemplar deste tipo de dispositivo. Seja X_i , o valor de uma característica de qualidade do i -ésimo item amostrado e w um limite discriminante. Se $X_i > w$, então o item é classificado em não aprovado, caso contrário em aprovado. Seja Y o total de peças classificadas em não aprovadas. Se $Y > UCL$ então o processo é declarado fora de controle. [Wu et al. \(2009\)](#) observaram que o gráfico de controle np_x (para monitorar a média do processo) terá um desempenho semelhante ao \bar{X} tradicional se dobrarmos o tamanho da amostra usado para o gráfico \bar{X} . Esse argumento é a chave, pois a inspeção por atributos é mais rápida, mais barata e totalmente viável.

Nos gráficos de controle p e np tradicionais, um item é classificado em conforme se o item inspecionado atender a um conjunto de requisitos estabelecidos pela equipe de engenharia, como os limites de especificação; caso contrário, o item é classificado em não conforme. Segundo [Montgomery \(2009\)](#) para gráficos de controle por atributos p ter a mesma probabilidade de detecção de mudanças que o gráfico \bar{X} , em cenários similares, há necessidade de um grande aumento no tamanho da amostra, aproximadamente 9 vezes

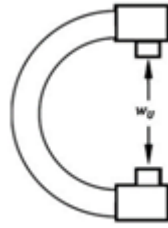


Figura 1 – Dispositivo GO/NO GO (Source: [Sampaio, Ho e Medeiros \(2013\)](#) A Combined $np_x - \bar{X}$ Control Chart to Monitor the Process Mean in a Two-Stage Sampling. Quality and Reliability Engineering International)

($n_p = 9 \times n_{\bar{X}}$), em que n_p e $n_{\bar{X}}$, respectivamente, os tamanhos das amostras utilizados para os gráficos de controle por atributos p e, por variáveis \bar{X} .

[Quinino, Ho e Trindade \(2015\)](#) propuseram um gráfico de controle por atributos denominado \bar{X}_{rec} . Neste é realizado um procedimento que classifica um item em três categorias, ao utilizar um dispositivo GO/NO GO. O número de itens de cada categoria é contabilizado e números aleatórios são gerados de acordo com a frequência de cada categoria segundo 3 distribuições Normais com médias diferentes (uma para cada categoria) e variâncias iguais. A média aritmética destes números gerados é a estatística \bar{X}_{rec} a ser plotada no gráfico de controle.

Posteriormente [Quinino, Bessegato e Cruz \(2017\)](#) apresentaram uma outra proposta de gráfico de controle também por atributos denominada \bar{X}^{att} , na qual um dispositivo GO/NO GO com cinco categorias foi utilizado para quantificar o número de itens presentes em cada categoria. A estatística \bar{X}^{att} é o resultado do cálculo da média dos limites médios de cada categoria ponderados pelas frequências de cada classe. \bar{X}^{att} se mostrou uma alternativa ao gráfico de controle \bar{X} tradicional para o monitoramento de ocorrências de mudanças na média do processo, em casos onde informações relativas à característica de qualidade de interesse estão disponíveis somente como atributo. Sua implementação requer uma busca para definição das cinco categorias e a média ponderada. Embora os gráficos \bar{X}_{rec} e \bar{X}^{att} tenham bons desempenhos, suas implementações apresentam algumas dificuldades operacionais, como por exemplo requerer a fabricação dos dispositivos com os limites de advertência ótimos e pessoal altamente treinado para sua aplicação. Além disso, a estatística \bar{X}^{att} assume um número finito de valores, deste modo nem sempre seja possível atingir valores de ARL_0 desejáveis ([QUININO et al., 2020](#)).

E em recente trabalho [Quinino et al. \(2020\)](#) sugeriram um outro gráfico de controle por atributos denominado \bar{X}^{tn} . Nesse, os itens também são classificados em cinco categorias ao utilizar um dispositivo GO/NO GO encontrado no mercado, que quantifica o número de itens contidos em cada categoria. Contabilizados os itens em cada categoria são gerados valores de uma Normal truncada, somados e calculada sua média, a qual é a estatística plotada no gráfico de controle \bar{X}^{tn} . Contudo, a principal vantagem apresentada

é que o procedimento utiliza um dispositivo típico encontrado no mercado (usualmente aplicado para o gráfico de controle \bar{X} tradicional), além dos limites de controle aplicados serem exatamente àqueles aplicados ao gráfico de controle \bar{X} tradicional. Nesta proposta também foi verificado o desempenho do \bar{X}^{tn} , que demonstrou um desempenho que compete com o \bar{X} tradicional com um pequeno aumento de sua amostra, um acréscimo de três unidades, comparada ao tamanho da amostra do \bar{X} tradicional.

O uso de gráficos de controle por atributos com o uso de dispositivos se apresenta como uma alternativa interessante para o monitoramento do valor médio de uma variável (X) de interesse, contudo estudos demonstram que o desempenho destes gráficos se torna competitivo quando o tamanho de suas respectivas amostras é maior que àquele usado para o gráfico de controle \bar{X} tradicional.

Tendo em vista esta característica, diversos estudos adotam estratégias para melhorar o desempenho do gráfico de controle \bar{X} , por meio de variações do gráfico \bar{X} . Daudin (1992) propôs a estratégia de amostras duplas ou dois estágios (Double Sampling), o gráfico \bar{X} DS. Nesta uma amostra inicial é obtida e dividida em duas sub-amostras. Na primeira sub-amostra, os itens são medidos, calculada sua média e comparada a seu critério de aceitação, se o resultado atender a este critério, o processo é declarado sob controle, não sendo necessário inspecionar a segunda amostra, caso contrário, os itens da segunda sub-amostra são medidos, calculada sua média e seu resultado é contabilizado, o julgamento do status do processo será feito por meio da avaliação conjunta dos resultados da primeira e segunda amostra.

Prabhu, Runger e Keats (1993) realizaram um estudo no qual foi proposto um esquema, o qual é referido no estudo por *dual-sample-size* (em tradução livre, esquema com dois tamanhos de amostra), que mantinha fixos o intervalo de inspeção e limites de controle, mas sem necessariamente restringir o tamanho da amostra. Neste estudo, o gráfico de controle \bar{X} foi usado com tamanho de amostra variável. Assim a localização da média da amostra precedente com relação a limites de limiar (w) determinam o tamanho da amostra vigente. Ou seja, se a média da amostra precedente se encontra dentro dos limites de limiar, a próxima amostra terá tamanho n_1 , se a média da amostra precedente encontra-se fora dos limites de limiar, mas dentro dos limites de controle, a próxima amostra terá tamanho n_2 , com $n_1 \geq 1$ e $n_1 < n_2$.

Costa (1994) desenvolveu um estudo que compara (em termos de velocidade de detecção de mudanças na média do processo) o gráfico \bar{X} "puro" com o gráfico \bar{X} com alguns esquemas denominados "adaptivos" entre eles: *VSS*, *VSI* e gráfico \bar{X} DS. No esquema *VSS*, o tamanho da amostra selecionada depende do resultado observado na amostra precedente. Quando o resultado da amostra precedente está próximo dos limites de controle deve-se utilizar uma amostra grande, no entanto, quando o resultado observado na amostra precedente está próximo do valor alvo deve-se utilizar uma amostra

pequena. No esquema *VSI* o intervalo de inspeção é definido com base no resultado das observações precedentes, se os resultados estão próximos ao valor alvo então pode haver um relaxamento no controle e utiliza-se um maior intervalo para a próxima inspeção, caso os resultados obtidos na observação precedente estejam próximos aos limites de controle o controle deve ser intensificado e realizado num intervalo de inspeção menor. No esquema *DS*, como citado acima, a amostragem é realizada em dois estágios (com duas sub-amostras), sendo que o resultado da primeira sub-amostra pode ser utilizado para o julgamento do status do processo. Ao observar seus resultados, foi percebido destaque da estratégia *VSS*, com vantagem sobre a estratégia *VSI* para tamanhos de mudança da média pequenos ($\delta < 1$), embora quando objetivo é detectar mudança de tamanho moderado na média do processo o gráfico \bar{X} *DS* tem resultado ligeiramente melhor contudo, deve-se questionar se esta ligeira vantagem compensa as dificuldades relacionada à administração deste esquema. Assim percebe-se similaridade entre os esquemas \bar{X} *VSS* estudados por Prabhu, Runger e Keats (1993) e Costa (1994).

Epprecht, Costa e Mendes (2003) desenvolveram um modelo geral para gráficos de controle adaptativos por atributos. No esquema adaptativo, todos os parâmetros do gráfico (tamanho da amostra, intervalo de inspeção, largura dos limites de controle) alternam entre dois valores, de acordo com a estatística proveniente da amostra precedente (um gráfico de controle *Vp* por atributos). O foco de sua análise foi destinado ao gráfico *c* adaptativo, contudo, uma vez atendidas algumas especificidades, seus resultados podem ser estendidos aos gráficos *np*, *p* e *u* adaptativos. Ao supor que um gráfico *c* adaptativo é usado para o controle do processo. Dois conjuntos de parâmetros definem o gráfico *c* adaptativo: $\theta_1 = \{m_1, h_1, UCL_1, WL_1\}$ e $\theta_2 = \{m_2, h_2, UCL_2, WL_2\}$, em que m_i é o tamanho da amostra, h_i é o intervalo de inspeção, UCL_i é o limite de controle (ou de ação) superior, e WL_i é um limite de alerta, $i = 1, 2$. A operação do gráfico *c* adaptativo é simples. Cada amostra é obtida com uso dos parâmetros θ_1 ou θ_2 , de acordo com as seguintes regras: (i) se $x_k < WL_i$, use θ_1 para a próxima amostra; (ii) se $WL_i < x_k < UCL_i$, use θ_2 e (iii) se $x_k > UCL_i$, se inicia a busca por causas especiais (onde x_k é o número de não conformidades na k -ésima amostra). O estudo demonstrou que gráficos adaptativos por atributos podem detectar mudanças pequenas e moderadas no processo mais rápido que gráficos tradicionais com parâmetros fixos, sem demandar mais inspeções ou aumentar a taxa de falsos alarmes. Assim os benefícios proporcionados pelo esquema adaptativo podem ser explorados em duas direções: (i) obter maior velocidade com o mesmo custo da qualidade; ou (ii) manter a mesma velocidade com um custo da qualidade menor. No entanto, devido o maior grau de exigência e detalhes demandados para a construção do gráfico adaptativo por atributos, suas vantagens se tornam mais relevantes ao passo que os requisitos de especificação para o processo se tornam mais exigentes.

Rodrigues, Epprecht e Magalhães (2011) propuseram um procedimento que em-

prega um esquema DS para o gráfico de controle por atributos np , para monitorar um processo cuja característica de qualidade de interesse possui distribuição binomial (com os parâmetros n e p). A característica de qualidade é o número de itens não conformes em uma amostra de tamanho n e p representa a taxa de não conformidade do processo. O gráfico $npDS$ faz uso de cinco parâmetros: o tamanho da primeira amostra (n_1), o número de aceitação para a primeira amostra (Ac_1), o número de rejeição para a primeira amostra (Re_1), o tamanho da segunda amostra (n_2) e o número de aceitação do segundo estágio (Ac_2). Sendo WL , UCL_1 e UCL_2 , respectivamente, os limites de alerta e controle para um gráfico $np DS$. Então, o gráfico $npDS$ é definido por cinco parâmetros: n_1 , n_2 , WL , UCL_1 e UCL_2 . Periodicamente, em intervalos de amostragem fixos, uma amostra de tamanho n_1 é retirada no processo. Seja d_1 o número de itens não conformes encontrados nesta amostra (de tamanho n_1). Se $d_1 < WL$, o processo é declarado sob controle e o esquema de controle continua operando com amostra de tamanho n_1 . Caso contrário, se $d_1 > UCL_1$, existe uma indicação de uma condição fora de controle no processo e uma investigação deve ser iniciada. No entanto, se $WL < d_1 < UCL_1$, uma amostra adicional de tamanho n_2 é retirada do processo. Seja d_2 o número de itens não conformes encontrados nesta amostra de tamanho n_2 . Nesse caso, a decisão depende de $(d_1 + d_2)$. Se $(d_1 + d_2) < UCL_2$, o processo é declarado sob controle. Se $(d_1 + d_2) > UCL_2$, o processo é declarado fora de controle e uma investigação deve ser iniciada. Sempre que o processo é considerado sob controle (ou é retornado a condição sob controle como resultado de ações corretivas), no próximo intervalo de inspeção programado retorna à primeira fase do esquema DS , retirando uma amostra de tamanho n_1 . Na comparação de desempenho entre o gráfico $np DS$, o gráfico np tradicional, o gráfico $np VSS$, os gráficos $np CUSUM$ e $np EWMA$ foi revelado que, como regra geral simples, para o tamanho médio da amostra de pelo menos 200 itens (para $p_0 = 0.05$), ou 100 itens (para $p_0 = 0, 10$), ou 50 itens (para $p_0 = 0.20$), o esquema DS pode ser considerado o mais rápido para a detecção de aumentos de 100% ou mais na fração não conforme do processo, e o esquema VSS é o mais rápido para a detecção de aumentos menores.

Kooli e Limam (2011) em seu trabalho realizaram uma proposta relativa à estratégia de tamanho de amostra variável, especialmente para o gráfico de controle por atributos np , que incluiu o desenvolvimento de uma formulação de custos. Com base em suposições sobre o comportamento do processo, tais como o processo se inicia no estado sob controle e se mantém neste estado até a sinalização de uma causa especial, provocando uma mudança deste estado. No estado sob controle a proporção de itens defeituosos é representada por p_0 . Uma vez sinalizada a ocorrência de uma causa especial o valor desta proporção se move para $p_1 > p_0$. A implementação deste gráfico requer a determinação do conjunto de parâmetros $S_{VSS} = \{n_1, WL_1, UCL_1, n_2, WL_2, UCL_2, h\}$ com $UCL_i = n_i p_0 + k \sqrt{(n_i p_0 (1 - p_0))}$ e $WL_i = n_i p_0 + w \sqrt{(n_i p_0 (1 - p_0))}$, $i = 1, 2$, onde k e w se referem às larguras dos limites de controle e limites de alerta, respectivamente.

Uma vez definidos os parâmetros, o controle é definido por meio da localização de uma estatística D_t , número total de itens defeituosos, referente a divisão de três regiões (Região $I_1 : 0 < D_t < WL_i$; Região $I_2 : WL_i < D_t < UCL_i$; Região $I_3 : D_t > UCL_i$). Se D_t cai na primeira região, I_1 , há uma forte evidência de que o processo está operando em boas condições, então pode ser empregado um relaxamento no controle, e seleciona-se uma amostra menor no intervalo de inspeção seguinte. Se D_t cai na segunda região, I_2 , a evidência indica que pode haver alguma suspeita de condição fora de controle, o que requer uma amostra maior no intervalo de inspeção seguinte. Por outro lado, quando D_t cai na terceira região, I_3 , o processo é julgado fora de controle, deve ser interrompido para ajustes na busca e solução de causas especiais, para retorno da condição sob controle.

Como já mencionando, comumente gráficos de controle por atributos tem suas classificações realizadas por meio de dispositivos GO/NO GO, neste sentido [Aparisi, Epprecht e Mosquera \(2018\)](#) apresentaram o gráfico de controle por atributos denominado Y_T e o esquema $Y_S Y_L$. Em qualquer dos dois esquemas na fase de monitoramento, uma amostra periodicamente é extraída do processo. No gráfico de controle Y_T , os itens são classificados em pequeno, normal ou grande, de acordo com um dispositivo GO/NO GO ideal, projetado e fabricado com este propósito. Por exemplo, se o diâmetro de um furo está sendo monitorado, com o uso de um dispositivo calibrador GO/ NO GO, este terá duas hastes, que classificam os itens em “pequeno” (ambas as hastes do dispositivo calibrador não passam pelo furo), “normal” (uma haste passa pelo furo e a outra não passa) ou “grande” (ambas as hastes passam pelo furo). O total de itens classificados em pequeno ou grande são contabilizados e plotados no gráfico. O esquema $Y_S Y_L$ consiste em dois gráficos de controle por atributos, o Y_S , expressa o número de itens na amostra classificados em pequeno, o Y_L , expressa o número expressa o número de itens na amostra classificados em grande. $Y_T = Y_S + Y_L$. A avaliação dos gráficos de controle em ambos esquemas é unilateral, pois não apresentam um limite inferior de controle. No gráfico de controle Y_T , se o valor de $Y_T > UCL_T$, o processo é declarado fora de controle, caso contrário está sob controle. No gráfico de controle Y_S , se o valor de $Y_S > UCL_S$, o processo é declarado fora de controle, o que indica que a média do processo diminuiu. No gráfico de controle Y_L , se o valor de $Y_L > UCL_L$, o processo é declarado fora de controle, o que indica que a média do processo aumentou. Se ambos, Y_S e Y_L , sinalizam há uma indicação de que a variância do processo aumentou. Neste estudo o UCL foi definido como a menor contagem que deve ser interpretada como um alarme. Por se tratar de dois problemas de otimização diferentes, os critérios para a fabricação dos dispositivos ideais são diferentes para o Y_T e $Y_S Y_L$.

Recentemente, [Mosquera e Aparisi \(2020\)](#) propuseram o desenvolvimento de uma estratégia de amostragem de duplo estágio com dispositivos, para o aumento do desempenho na detecção de mudanças no processo, que utilizou limites discriminantes como parte dos critérios de avaliação dos itens e, construção do gráfico de controle $wY_s Y_L$. Neste

esquema, a estatística de controle é o valor máximo de duas combinações lineares das contagens de Y_S e Y_L , dado um peso w , portanto, $\max(wY_S + Y_L, Y_S + wY_L)$, que pode ser aplicado ao monitoramento da média, da variabilidade ou monitoramento simultâneo da média e da variabilidade, no qual é assumida uma distribuição Normal, por meio de um procedimento que utiliza algoritmos genéticos na busca por uma solução ótima na definição de seus parâmetros.

No entanto, são poucas as contribuições encontradas na literatura com propostas de gráficos de controle por atributos para monitorar a variância do processo, como em [Ho e Quinino \(2013\)](#) e [Bezerra, Ho e Quinino \(2018\)](#).

Deste modo, após a análise realizada na literatura, verifica-se uma oportunidade para aplicar o procedimento do gráfico de controle np_x ([WU et al., 2009](#)) no monitoramento da variância.

Além disso, sugerir a aplicação de um esquema simplificado de tamanho de amostra variado, por meio de uma inspeção por atributos para o monitoramento de mudança na média de uma variável aleatória X . Quando aqui é mencionado o termo “esquema simplificado”, refere-se a um esquema no qual o planejamento de seu monitoramento é realizado sem alteração do conjunto de parâmetros empregados a cada ciclo de observações realizadas (inspeções do processo), portanto, independente do valor da estatística observada no intervalo de inspeção precedente, o conjunto de parâmetros a serem empregados ao gráfico de controle no intervalo de inspeção subsequente é mantido. Mesmo sendo um esquema que tem a característica de tamanho de amostra variável em seu gráfico de controle, na proposta aqui apresentada usaremos sempre a mesma sequência na seleção do tamanho de amostra a ser inspecionado (n_a, n_b) durante a execução do monitoramento do processo, o que simplifica a tomada de decisão, por se tratar de uma sequência fixa pré-estabelecida, em especial, quando os resultados sinalizam uma condição sob controle. Esta é uma característica interessante para aplicações práticas do procedimento proposto neste trabalho, uma vez que a elaboração de um esquema simplificado onde procura-se inserir menores variações às características de formulação do gráfico de controle (tamanho da amostra, intervalo de inspeção e limites de controle) facilita sua operação, minimiza a necessidade de treinamento especializado, bem como pode reduzir a longo prazo a possibilidade de erros na elaboração do gráfico de controle e conseqüentemente de tomada de decisão. Deste modo, é preciso pesquisar como determinar tais parâmetros, o que podemos enquadrar como melhorias ao gráfico de controle np_x proposto por [Wu et al. \(2009\)](#).

2 O Gráfico por atributos $np_x^{\sigma^2}$ no monitoramento da variância

Neste capítulo as características do gráfico de controle por atributos np_x são revisadas. Inicialmente este gráfico foi proposto para monitorar a média, no entanto, foi estendido seu procedimento para monitorar a variância, que será doravante denominado $np_x^{\sigma^2}$. Aqui são assumidas como suposições a distribuição da característica de qualidade observada como Normal, sendo observações independentes, com média μ_0 e variância σ_0^2 conhecidas. Para este procedimento também assumimos que a média do processo se mantém inalterada. Na ocorrência de mudanças do processo, o valor da variância σ_0^2 é alterado para $\sigma_1^2 = \gamma^2 \sigma_0^2$, $\gamma > 1$, em que γ expressa a magnitude da mudança sobre a variância do processo (σ_0^2), nosso interesse está na detecção de desvios unilaterais da variância do processo.

2.1 O gráfico de controle np_x e sua extensão para monitorar a variância através do gráfico por atributos $np_x^{\sigma^2}$

Na construção do gráfico de controle por atributos np_x para o monitoramento da média do processo, amostras sequenciais de tamanhos n são extraídas. Cada unidade é classificada de acordo com os limites de advertência ($w_i, i = l, u$). Se $(X_{k_i} - \mu_0)/\sigma_0 > |w_i|$ o item é classificado em não aprovado, caso contrário, é classificado em aprovado (w_i , limite de advertência padronizado). Os itens são simplesmente contabilizados e, ao término da inspeção teremos d , número de unidades não aprovadas. O procedimento não requer cálculos, sendo capaz de detectar mudanças na média do processo (δ , em que δ expressa o tamanho da mudança na média do processo em termos de desvio padrão). Se d (unidades que excederam os limites de advertência) é maior que o limite superior de controle UCL_{np_x} , o processo é sinalizado como fora de controle. Os limites de advertência, em condições sob controle ($\mu = \mu_0$), são simetricamente posicionados em relação à media ($w_l = -w_u$).

Além disso, Wu et al. (2009) definem um determinado conjunto de características a serem especificadas para a construção do gráfico de controle np_x : o tamanho da amostra (n_{np_x}), o intervalo de inspeção (h_{np_x}), o valor médio mínimo do tempo até o sinal de mudanças em condições sob controle (τ) e os valores (para processo condições sob controle) da média (μ_0) e desvio padrão (σ_0). O tamanho da amostra e intervalo de inspeção (h) são definidos levando em consideração os recursos disponíveis para o monitoramento. O valor de τ é definido pelo projetista do processo, tal que se obtenha uma taxa de falso alarme

tolerável. Os valores de μ_0 e σ_0 são estimados normalmente com uso dos dados observados em lotes-piloto no início da operação. A taxa de falso alarme requerida é determinada com base no valor de α , o risco da ocorrência do erro do tipo I (probabilidade de que o gráfico de controle sinalize uma condição fora de controle, quando na realidade o processo está sob controle).

Seja $P(p)$ a probabilidade de o número de unidades não aprovadas d ser maior que UCL_{np_x} dada pela fração de não conformes p . Se d segue uma distribuição binomial:

$$\begin{aligned} P(p) &= 1 - \sum_{d=0}^{UCL_{np_x}} \binom{n}{d} p^d (1-p)^{(n-d)} \\ p &= 1 - \Phi(w_u - (\mu_0 + \delta\sigma_0)) + \Phi(w_l - (\mu_0 + \delta\sigma_0)), \end{aligned} \quad (2.1)$$

em que $\Phi()$ é a função da probabilidade acumulada na distribuição normal padrão. Quando não houve mudança no processo, isto é, o processo sinaliza condições sob controle, p assume o valor p_0 ($\delta = 0$ em (2.1)) e a probabilidade do erro do tipo I (2.2) produzida pelo gráfico np_x equivale a:

$$\begin{aligned} \alpha &= P(p_0) \\ \alpha &= \sum_{d=0}^{UCL_{np_x}} \binom{n}{d} p_0^d (1-p_0)^{n-d}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

O risco da ocorrência do erro do tipo II (2.3) é a probabilidade do gráfico de controle falhar em sinalizar quando o processo está fora de controle, para o gráfico np_x equivale à:

$$\begin{aligned} \beta &= 1 - P(p_1) \\ \beta &= \sum_{d=0}^{UCL_{np_x}} \binom{n}{d} p_1^d (1-p_1)^{n-d}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Assim os valores de p_0 e p_1 representam respectivamente as probabilidades de um item ser não aprovado na amostra de tamanho n quando o processo está sob controle ($\delta = 0$) e fora de controle ($\delta \neq 0$) em (2.1) no caso de monitoramento da média.

Uma métrica que tem sido adotada por muitos autores como método de sumarizar características e propriedades dos gráficos de controle é o *Average Run Length (ARL)*, que expressa o número médio de amostras plotadas antes de uma indicação de uma condição fora de controle (MONTGOMERY, 2009).

Analogamente, neste capítulo, os parâmetros acima citados são utilizados para a construção do gráfico de controle $np_x^{\sigma^2}$.

Assim ao utilizar o gráfico de controle $np_x^{\sigma^2}$, quando o processo está sob controle ($\sigma^2 = \sigma_0^2$, $\gamma = 1$), teremos:

$$\begin{aligned} ARL_0 &= \frac{1}{P(p_0)}, \\ ARL_0 &= \frac{1}{\sum_{d=0}^{UCL_{np}} \binom{n}{d} p_0^d (1-p_0)^{n-d}}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Se o valor da variância σ_0^2 é alterado para $\sigma_1^2 = \gamma^2 \sigma_0^2$, $\gamma > 1$, quando o processo está fora de controle, o desempenho do gráfico de controle $np_x^{\sigma^2}$, proposto neste trabalho, é avaliado através do valor de ARL_1 , conforme segue:

$$ARL_1 = \frac{1}{1 - \sum_{d=0}^{UCL_{np_x}} \binom{n}{d} p_1^d (1-p_1)^{n-d}}. \quad (2.5)$$

Neste capítulo o uso do gráfico $np_x^{\sigma^2}$ é empregado para o monitoramento da ocorrência de desvios unilaterais do valor da variância do processo. Os parâmetros do gráfico de controle $np_x^{\sigma^2}$ são: o tamanho de amostra n_{np_x} , o limite de controle UCL_{np_x} , o limite discriminante padronizado $|w_u|$, equivalente à $(X_{k_i} - \mu_0)/\sigma_0$. Depois de escolhido o tamanho de amostra n_{np_x} , o limite de controle UCL_{np_x} e o limite discriminante padronizado w_u são determinados por uma busca intensiva, tal que se obtenha parâmetros otimizados ao calcular o valor ARL_{0_c} , para atingir um valor alvo de ARL_{0_T} ($ARL_{0_T} = 370.4$, o qual representa uma taxa de falso alarme equivalente a 0.27%).

Explicitamente, consiste em encontrar o vetor Θ_1 :

$$\begin{aligned} \Theta_1 = (w_u^o, UCL_{np_x}^o) &= \arg(\min ARL_1) \\ \text{Sujeito às restrições} &: \quad 0 \quad |w_u| \quad 3.5 \\ & \quad 0 \quad UCL_{np_x} \quad n_{np_x} \\ & \quad |ARL_{0_c} - ARL_{0_T}| \quad \varepsilon, \quad \varepsilon = 0.15. \end{aligned} \quad (2.6)$$

2.2 O desempenho do gráfico de controle $np_x^{\sigma^2}$ no monitoramento da variância

Nesta seção, o desempenho dos gráfico de controle por atributos $np_x^{\sigma^2}$ é avaliado e comparado com o desempenho do gráfico de controle S^2 , ambos os gráficos de controle configurados para ter um $ARL_{0_T} = 370.4$. Para obter os parâmetros do gráfico de controle $np_x^{\sigma^2}$ foi desenvolvido um programa específico para este fim utilizando o software R, devido ao elevado número de configurações (de tamanhos de amostra, limites de controle, limites de advertência, etc). A busca forneceu potenciais candidatos, configurações que satisfazem à condição do valor ARL_0 de aproximadamente 370.4. Dentre elas, foram selecionadas algumas configurações ótimas que competem com o gráfico de controle S^2 . Os planos selecionados para avaliar a abordagem proposta neste estudo apresentam as seguintes características: (a) o tamanho da amostra do gráfico de controle S^2 tradicional é igual a $n_{S^2} = 3, 4, 5, 6$; (b) o tamanho da amostra n_{np_x} é menor (ou igual) ao dobro do tamanho da amostra n_{S^2} usado para o gráfico S^2 ($n_{np_x} = 2 \times n_{S^2}$); (c) o desempenho para detectar pequenos desvios deve ser ao menos similar ao gráfico S^2 .

Tabela 1 apresenta algumas configurações de planos para o gráfico $np_x^{\sigma^2}$ que poderiam competir (ou seja, valores menores de ARL_1) com o gráfico de controle S^2 para tamanhos de amostra $n_{S^2} = 3, 4, 5, 6$, considerando tamanhos da mudança $\gamma = 1.10$ a 2.00, com incremento de 0.1. Os planos mostrados na Tabela 1 são aqueles (entre vários planos) que fornecem o menor tamanho de amostra, além de valores de ARL_1 mais baixos do que aqueles obtidos com o gráfico S^2 . Vários resultados interessantes podem ser observados nesta tabela:

- Notavelmente, usando uma pequena amostra de 3 unidades, o gráfico $np_x^{\sigma^2}$ tem desempenho que fornece ARL_1 inferior ao gráfico de controle S^2 (também com tamanho de amostra de 3 unidades) em todos os tamanhos de mudança (γ).
- Para $n_{S^2} = 4$, conforme o tamanho da amostra para o gráfico de controle S^2 aumenta, amostras maiores para o gráfico $np_x^{\sigma^2}$ são necessárias para obter melhor desempenho do que o gráfico de controle S^2 , mas sempre menores que duas vezes. A razão entre os dois tamanhos de amostra está na faixa $[1.5; 1.667]$, (1.5 para $n_{S^2} = 4$ e 1.667 para $n_{S^2} = 6$). Portanto, se o custo da inspeção por atributos for menor que a metade do custo da inspeção variável, vale a pena usar o gráfico $np_x^{\sigma^2}$ para monitorar a variância.
- Ao comparar o desempenho e resultados disponíveis na Tabela 1, podemos ver que o gráfico $np_x^{\sigma^2}$ apresenta razoável melhoria, pode competir para todos os tamanhos de mudança no monitoramento da variância do processo, porém com o ônus do aumento do tamanho da amostra.

Tabela 1 – Comparação do desempenho - valores de ARL dos gráficos de controle: S^2 versus $np_x\sigma^2$ - $n_{S^2} = 3, 4, 5, 6$.

γ	ARL_1							
	S^2	$np_x\sigma^2$	S^2	$np_x\sigma^2$	S^2	$np_x\sigma^2$		
1.00	370.398	370.367	370.398	370.405	370.398	370.375		
1.10	132.699	131.336	117.832	114.297	106.934	104.346		
1.20	60.785	59.163	49.850	46.664	42.491	39.955		
1.30	33.107	31.609	25.748	23.295	21.091	19.089		
1.40	20.443	19.142	15.354	13.485	12.275	10.739		
1.50	13.856	12.738	10.178	8.725	8.028	6.831		
1.60	10.078	9.114	7.307	6.146	5.727	4.773		
1.70	7.741	6.901	5.574	4.624	4.365	3.586		
1.80	6.206	5.466	4.459	3.664	3.500	2.851		
1.90	5.147	4.488	3.703	3.024	2.921	2.369		
2.00	4.387	3.795	3.167	2.579	2.515	2.039		
Tamanho da amostra	$n_{S^2} = 3$	$n_{np_x} = 3$	$n_{S^2} = 4$	$n_{np_x} = 6$	$n_{S^2} = 5$	$n_{np_x} = 8$	$n_{S^2} = 6$	$n_{np_x} = 10$
UCL	$UCL_{S^2} = 5.915$	$UCL_{np_x} = 0$	$UCL_{S^2} = 4.719$	$UCL_{np_x} = 1$	$UCL_{S^2} = 4.063$	$UCL_{np_x} = 0$	$UCL_{S^2} = 3.641$	$UCL_{np_x} = 2$
Limite de advertência	-	$w_u = 3.320$	-	$w_u = 2.466$	-	$w_u = 3.460$	-	$w_u = 2.1734$

3 Gráfico por atributos $np_x^\mu(I)$ para monitorar a média

Para uma avaliação por atributos é comum a utilização de um anel calibrador (“Go / No Go”) para verificar se os limites discriminantes foram ou não excedidos (KENNEDY; HOFFMAN; BOND, 1987). Com base no foco principal de um gráfico de controle por atributos que está na detecção da deterioração da qualidade (CHIU, 1975), apenas os limites superiores de controle são considerados. Se a estatística calculada exceder o limite de controle superior, o processo é julgado fora de controle e deve ser interrompido para investigar se há alguma causa especial presente, então (se necessário) efetuado seu ajuste para uma transição de retorno a seu estado sob controle.

Este trabalho propõe a construção do gráfico de controle por atributos np_x com amostras de tamanho variável simplificado para o monitoramento da média do processo, que será doravante nomeado como $np_x^\mu(I)$, sendo extraídas amostras sequenciais de tamanhos n_a e n_b ($n_a > n_b$). Seja X_{k_i} o i -ésimo item da amostra de tamanho n_k , $k = a, b$. Se $(X_{k_i} - \mu_0)/\sigma_0 > z_k$ o item é classificado em não aprovado, caso contrário, é classificado em aprovado com $z_k = (W_k - \mu_0)/\sigma_0$, o limite de discriminante padronizado, (W_k , o limite discriminante não padronizado). Ao final da inspeção teremos Y_k o número de peças não aprovadas, $k = a, b$.

O procedimento de inspeção consiste nos seguintes passos:

1. Inicia-se o monitoramento coletando-se uma amostra de tamanho n_a e obtenha Y_a (utilizando um dispositivo GO/ NO GO, por exemplo). Se $Y_a > UCL_{n_a}$ então o processo é declarado fora de controle (o processo é interrompido para ajustes e inicia-se a procura das causas especiais) e vá para o passo 3, caso contrário, o processo é declarado sob controle e vá para o passo 2;
2. Colete uma amostra de tamanho n_b e obtenha Y_b . Se $Y_b > UCL_{n_b}$ então o processo é declarado fora de controle (o processo é interrompido para ajustes e inicia-se a procura das causas especiais). Vá para o passo 3, caso contrário, o processo é declarado sob controle e vá para o passo 1.
3. Repetir o passo 1.

Figura 2 ilustra o procedimento de inspeção. Figura 3 mostra um exemplo do gráfico de controle $np_x^\mu(I)$ com limites de controle $UCL_{n_a} = 6$, (limite de controle empregado para as amostras de tamanho n_a , representadas pelos quadrados) e $UCL_{n_b} = 1$, (limite

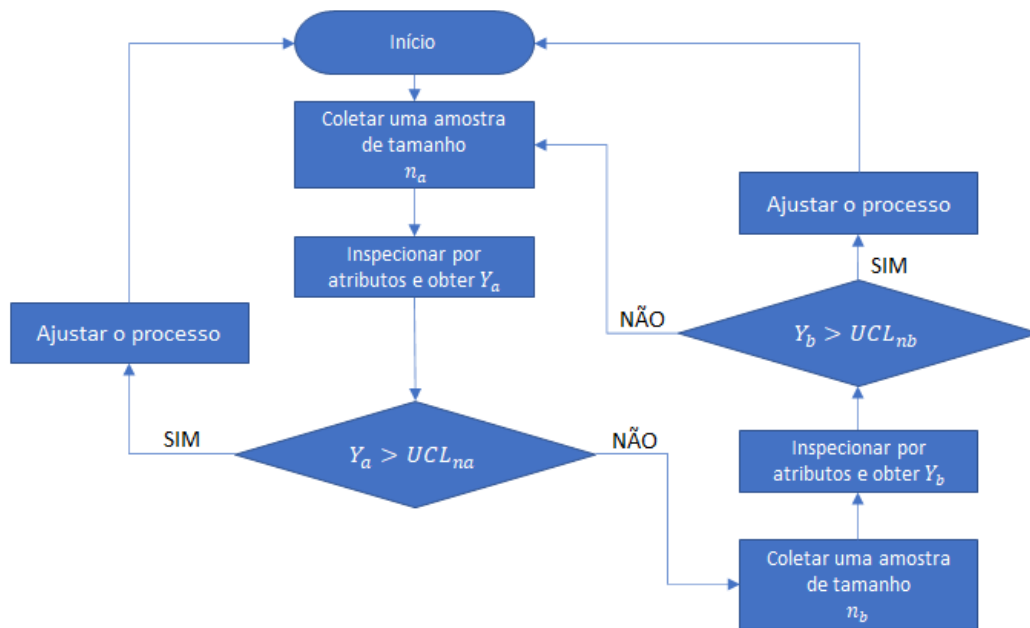


Figura 2 – Procedimento de inspeção do gráfico de controle por atributos $np_{x(I)}^{\mu}$. Fonte: Autor

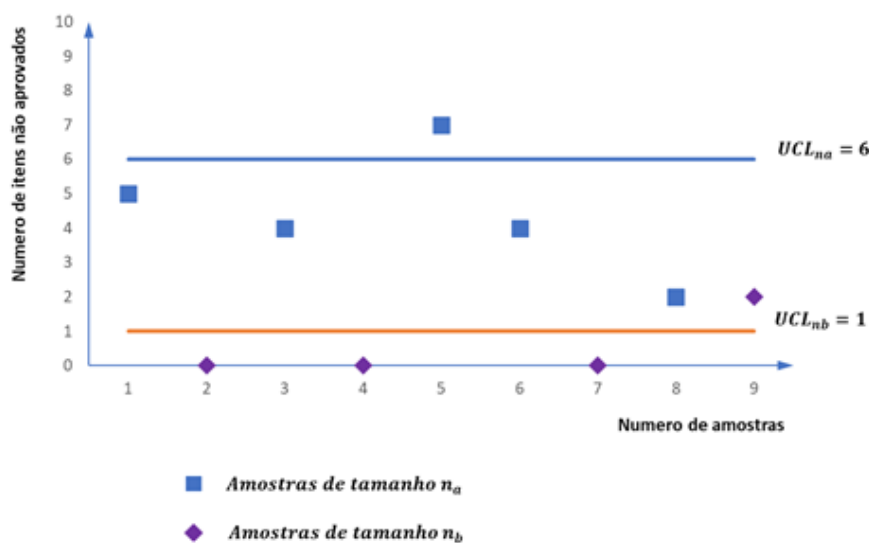


Figura 3 – Um exemplo do gráfico de controle $np_{x(I)}^{\mu}$. Fonte: Autor

de controle empregado para as amostras de tamanho n_b , representadas pelos losangos). Observe que a inspeção na 5ª amostra (quadrado – amostra de tamanho n_a) apresenta $Y_a > UCL_{na}$, então o processo é interrompido para ajuste, o procedimento de inspeção é reiniciado na 6ª amostra usando um tamanho de amostra n_a , seguido por um tamanho de amostra n_b . Novamente observe que a 9ª amostra (losango – amostra de tamanho n_b) apresenta $Y_b > UCL_{nb}$ como no caso anterior o processo é interrompido para ajuste.

O procedimento descrito acima é aplicado para casos de aumentos na média do

processo, ou seja: a hipótese alternativa como $H_1 : \Delta = \mu_1 - \mu_0 > 0$ com $\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma_0$. Para outras hipóteses alternativas $H_1 : \Delta < 0$ ou $H_1 : \Delta = 0$ alguns ajustes do procedimento descrito são necessários.

O esquema de inspeção apresentado pode ser descrito através de uma cadeia de Markov com os seguintes de estados de transição: Estado A , se Y_a está dentro dos limites de controle; Estado B , se Y_b está dentro dos limites de controle; Estado C , se Y_b está fora dos limites de controle e Estado D , se Y_a está fora dos limites de controle com a matriz de transição \mathbf{P} :

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c|cccc} & A & B & C & D \\ \hline A & 0 & P_B & 1-P_B & 0 \\ B & P_A & 0 & 0 & 1-P_A \\ C & P_A & 0 & 0 & 1-P_A \\ D & P_A & 0 & 0 & 1-P_A \end{array} \quad (3.1)$$

com as probabilidades P_A (a probabilidade de estar no estado A) e P_B (a probabilidade de estar no estado B) calculadas da seguinte forma:

$$P_A = \sum_{Y_a=0}^{UCL_{n_a}} \binom{n_a}{Y_a} p_{0_a}^{Y_a} (1 - p_{0_a})^{n_a - Y_a}, \quad (3.2)$$

$$P_B = \sum_{Y_b=0}^{UCL_{n_b}} \binom{n_b}{Y_b} p_{0_b}^{Y_b} (1 - p_{0_b})^{n_b - Y_b}. \quad (3.3)$$

O valor de p_{0_k} em (3.2) e (3.3) são as probabilidades de um item ser não aprovado na amostra de tamanho n_k , quando o processo está sob controle, expresso por $p_{0_k} = P\left(\frac{X_{k_i} - \mu_0}{\sigma_0} > z_k\right)$, $k = a, b$. É válido mencionar que no presente trabalho quando o processo está fora de controle, ou seja, houve uma mudança na média do processo de μ_0 para μ_1 , o valor da probabilidade de um item ser classificado em não aprovado na amostra n_k , será expresso por p_{1_k} , sendo

$$p_{1_k} = P\left(\frac{X_{k_i} - \mu_1}{\sigma_0} > z_k\right), \quad (3.4)$$

$k = a, b$. A matriz de transição \mathbf{P} é irredutível, aperiódica e \mathbf{P}^t converge para uma matriz na qual todas as linhas são idênticas a um vetor $\boldsymbol{\pi}$ quando $t \rightarrow \infty$. O vetor $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$ é uma distribuição estacionária e cada elemento π_i , $i = 1, 2, 3, 4$ está associado a um estado da matriz \mathbf{P} . Ele é obtido como a solução do sistema linear de equações $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} \times \mathbf{P}$, sujeita à restrição $\sum_{i=1}^4 \pi_i = 1$. Por meio da solução do sistema mencionado, temos $\pi_1 = \frac{P_A}{(1 + P_A)}$; $\pi_2 = \frac{(P_A \times P_B)}{(1 + P_A)}$; $\pi_3 = \frac{(P_A - P_A \times P_B)}{(1 + P_A)}$ e $\pi_4 = \frac{(1 - P_A)}{(1 + P_A)}$.

Os valores de π_3 e π_4 indicam a probabilidade a longo prazo que a inspeção sinalize que processo está fora de controle, utilizando as amostras de tamanho n_a e n_b , respectivamente. O tamanho médio de amostra (*Average Sample Size*, representado pela sigla *ASS*) usado neste procedimento é expresso por $ASS = n_a(\pi_1 + \pi_4) + n_b(\pi_2 + \pi_3)$.

Uma métrica que tem sido adotada por muitos autores para avaliar o desempenho dos gráficos de controle é o *average run length (ARL)*, o qual expressa o número médio de amostras até uma indicação de uma condição fora de controle (MONTGOMERY, 2009). Portanto o número médio de amostras até o sinal de uma condição fora de controle, considerando a matriz \mathbf{P} em (3.1) pode ser expresso por $ARL = \frac{1}{(\pi_3 + \pi_4)}$. Quando o processo está sob controle, teremos:

$$ARL_0 = \frac{1 + P_A}{1 - (P_A \times P_B)}. \quad (3.5)$$

Para os casos onde ocorreu mudança na média do processo de μ_0 para $\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma$ (apresentando status do processo fora de controle), os valores das probabilidades de ser estar nos estados *A* e *B* conseqüentemente sofrem alterações, assumindo novos valores P_{A_1} e P_{B_1} , conforme expressões (3.6) e (3.7):

$$P_{A_1} = \sum_{Y_a=0}^{UCL_{n_a}} \binom{n_a}{Y_a} p_{1_a}^{Y_a} (1 - p_{1_a})^{n_a - Y_a}, \quad (3.6)$$

$$P_{B_1} = \sum_{Y_b=0}^{UCL_{n_b}} \binom{n_b}{Y_b} p_{1_b}^{Y_b} (1 - p_{1_b})^{n_b - Y_b}. \quad (3.7)$$

com p_{1_k} em (3.4). Deste modo, quando μ_0 muda para μ_1 , temos dois eventos possíveis: a mudança pode ocorrer antes ou depois da inspeção realizada com a amostra de tamanho n_a . Considerando a mesma probabilidade de ocorrência desses dois eventos, quando o processo está fora de controle, o desempenho do gráfico de controle proposto neste trabalho é avaliado através do valor de ARL_1 , conforme segue:

$$\begin{aligned} ARL_1 &= 0.5 \left[(1 - P_{B_1}) + \left(1 + \frac{1}{\pi_3 + \pi_4} \right) P_{B_1} \right] + 0.5 \left(\frac{1}{\pi_3 + \pi_4} \right) \\ &= \frac{2 + P_{A_1} + P_{B_1}}{2 - 2P_{A_1}P_{B_1}}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Os parâmetros do gráfico de controle $np_{x(I)}^\mu$ são: os tamanhos de amostra n_a e n_b , os limites do gráfico de controle UCL_{n_a} e UCL_{n_b} para cada tamanho de amostra, os limites discriminantes padronizados z_a e z_b . Depois de escolhidos os tamanhos de amostra n_a e n_b , os limites de controle UCL_{n_a} e UCL_{n_b} e os limites discriminantes padronizados z_a e

z_b são determinados por uma busca intensiva, tal que se obtenha parâmetros otimizados ao calcular o valor ARL_{0_c} , para atingir um valor alvo de ARL_{0_T} ($ARL_{0_T} = 370.4$). Explicitamente, consiste em encontrar o vetor Θ_2 :

$$\begin{aligned} \Theta_2 = (z_a^o, z_b^o, UCL_{n_a}^o, UCL_{n_b}^o) &= \arg(\min ARL_1) & (3.9) \\ \text{Sujeito às restrições} &: 0 < z_i < 3, \quad i = a, b \\ &0 < UCL_{n_i} < n_i, \quad i = a, b \\ &|ARL_{0_c} - ARL_{0_T}| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon = 0.15. \end{aligned}$$

3.1 O desempenho do Gráfico de Controle $np_{x(I)}^\mu$

Nesta seção o assunto a ser abordado é o desempenho do gráfico de controle $np_{x(I)}^\mu$. Depois de escolhidos os tamanhos de amostra n_a e n_b , é necessário obter os parâmetros (os limites de controle $UCL_{n_a}; UCL_{n_b}$ e os limites discriminantes $z_a; z_b$) que otimizam o desempenho do gráfico de controle $np_{x(I)}^\mu$ para monitorar a média, (tal que se obtenha ARL_0 de aproximadamente 370,4). Assim, um programa específico foi desenvolvido para este fim utilizando o software R. Diversas rodadas foram realizadas para busca dos casos que atendessem (3.9).

Inicialmente foi realizada a comparação do gráfico $np_{x(I)}^\mu$ com o gráfico np_x . Os resultados mostrados na Tabela 2 são algumas entre outras boas configurações que usa tamanhos de amostra $n_{np_x} = 2, 4, 6, 8, 10$ e $ARL_{0_T} = 370, 4$. São apresentados os valores de ARL_1 para os tamanhos da mudança $\delta = 0.25$ a 2.00. Os resultados na Tabela 2 nos mostram que o gráfico de controle $np_{x(I)}^\mu$ precisa na maior parte dos casos menos unidades inspecionadas do que o gráfico de controle np_x para que obtenha um desempenho que compete com o gráfico np_x (em termos de ARL) principalmente para pequenos tamanhos de mudança (como $\delta < 1$). Para tamanhos de mudança médios (como $\delta = 1.25$) o esquema proposto também apresenta bons resultados, especialmente quando tamanhos de amostra menores ($n_{np_x} = 6$) são usados. Para tamanhos de amostra maiores ($n_{np_x} = 8$) quando $\delta = 1.25$, o gráfico $np_{x(I)}^\mu$ não apresentou um bom desempenho que compete com o gráfico np_x , por esta razão um traço foi inserido nestes campos. No entanto, para grandes tamanhos de mudança (como $\delta = 2$) o esquema não apresenta essas características (os resultados não são mostrados aqui). Consequentemente, para tamanhos da mudança pequenos e médios, o esquema proposto é medianamente mais econômico e também produz um melhor desempenho. Além disso, se o tamanho de amostra igual for usado para o np_x e $np_{x(I)}^\mu$, certamente o último gráfico é a melhor opção, pois sempre fornece um ARL_1 inferior.

Na Tabela 3, o desempenho do $np_{x(I)}^\mu$ é comparado com os gráficos de controle np_x e \bar{X} . De acordo Wu et al. (2009), para que o gráfico np_x tenha um desempenho igual

Tabela 2 – Comparação do desempenho (em termos de ARL) dos gráficos de controle: np_x e np_x^μ .

		Tam. da amostra		Lim. de controle		Lim. discriminantes		Tamanho da mudança δ									
								0	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	
np_x	n			UCL		wu											
	2			1		1.6261		370.332	140.399	59.116	27.559	14.173	8.006	4.942	3.314	2.398	
np_x^μ	ASS	n_a	n_b	UCL_{n_a}	UCL_{n_b}	z_a	z_b										
	2	3	1	2	0	1.015	2.935	370.420	136.976	56.424	26.013	13.391	7.649	4.811	3.303	2.453	
	2.5	4	1	2	0	1.28	2.935	370.295	125.193	47.437	20.437	10.035	5.592	3.511	2.462	1.906	
np_x	n			UCL		wu											
	4			2		1.3421		370.382	107.464	36.834	14.863	7.022	3.852	2.427	1.731	1.371	
np_x^μ	ASS	n_a	n_b	UCL_{n_a}	UCL_{n_b}	z_a	z_b										
	3.5	5	2	3	1	0.89	2.18	370.508	104.291	35.791	14.798	6.692	3.739	2.450	-	-	
	4	6	2	4	1	0.655	2.22	370.384	95.394	31.052	12.546	6.153	3.584	2.428	-	-	
np_x	n			UCL		wu											
	6			4		0.7617		370.255	85.406	25.320	9.518	4.458	2.543	1.720	1.335	1.149	
np_x^μ	ASS	n_a	n_b	UCL_{n_a}	UCL_{n_b}	z_a	z_b										
	5	8	2	5	1	0.64	2.52	370.273	80.114	23.400	8.986	4.400	-	-	-	-	
	5.5	9	2	5	1	0.765	2.69	370.270	74.261	20.639	7.737	3.791	2.358	-	-	-	
np_x	n			UCL		wu											
	8			5		0.7376		370.437	70.842	18.626	6.617	3.098	1.848	1.343	1.130	1.043	
np_x^μ	ASS	n_a	n_b	UCL_{n_a}	UCL_{n_b}	z_a	z_b										
	6.5	11	2	6	1	0.72	2.455	370.273	64.69	16.646	6.091	3.047	-	-	-	-	
	7	12	2	7	1	0.6	2.23	370.252	60.82	15.170	5.524	2.806	-	-	-	-	
np_x	n			UCL		wu											
	10			6		0.7074		370.522	60.321	14.441	4.971	2.376	1.501	1.172	1.051	1.012	
np_x^μ	ASS	n_a	n_b	UCL_{n_a}	UCL_{n_b}	z_a	z_b										
	8.5	15	2	9	1	0.485	2.285	370.265	51.011	11.749	4.266	2.293	-	-	-	-	
	9	16	2	9	1	0.555	2.825	370.254	48.01	10.777	3.917	2.158	-	-	-	-	

ao gráfico de controle \bar{X} , seu tamanho de amostra deve ser duas vezes maior do que o usado para \bar{X} . Portanto, três tamanhos de amostra são selecionados para o gráfico de controle np_x para a comparação: 6, 12 e 18, que devem ter um desempenho melhor do que o tradicional \bar{X} usando o tamanho da amostra com $n_{\bar{X}} = 3, 6, 9$.

Devido ao grande número de configurações (de tamanhos de amostra n_a e n_b , limites de controle, limites discriminantes, etc), alguns planos são selecionados para avaliar o gráfico np_x^μ , estes apresentam as seguintes características: 1 - o tamanho da amostra n_a é aproximadamente (ou igual) o dobro do tamanho da amostra usado para o gráfico \bar{X} , de modo a produzir um tamanho médio da amostra (ASS) mais próximo do tamanho da amostra usado para \bar{X} ; 2 - o desempenho para detectar pequenas mudanças deve ser pelo menos semelhante ao gráfico \bar{X} .

Para comparação com o gráfico \bar{X} usando $n_{\bar{X}} = 3$, cinco pares de n_a e n_b são selecionados: a) $n_a = 4$ e $n_b = 2$; b) $n_a = 5$ e $n_b = 1$; c) $n_a = 4$ e $n_b = 3$; d) $n_a = 5$ e $n_b = 2$ e e) $n_a = 6$ e $n_b = 1$. A pesquisa forneceu um total de 12111 casos que atendem à condição do valor ARL_0 de aproximadamente 370,4. Dentre eles, foram selecionadas algumas configurações que competem com o gráfico de controle \bar{X} . Optamos por apresentar apenas resultados relacionados a estes dois casos: Caso 1: $n_a = 5$ e $n_b = 2$ com $z_a = 0,885$; $z_b = 2,345$, $UCL_{n_a} = 3$; $UCL_{n_b} = 1$ e Caso 2: $n_a = 6$ e $n_b = 1$ com $z_a = 1,490$; $z_b = 1,000$; $UCL_{n_a} = 2$; $UCL_{n_b} = 1$. Os valores de ARL_1 são apresentados na Tabela 3 para tamanhos da mudança $\delta = \{0.25, 0.50, 0.75, 1.00, 1.25, 1.50, 1.75, 2.00, 2.25, 2.50, 2.75, 3.00\}$. Podemos ver que o gráfico de controle np_x^μ causa uma melhoria razoável. Ele pode competir

com o gráfico de controle \bar{X} usando um tamanho de amostra médio ligeiramente maior do que o usado para o gráfico \bar{X} (os valores de ARL_1 fornecidos pelo gráfico de controle $np_{x(I)}^\mu$ são menores ou próximos aos obtidos com o gráfico de controle \bar{X} para todos os tamanhos de mudança (δ) acima citados). Como a inspeção é por atributo, o $np_{x(I)}^\mu$ é mais barato e mais rápido do que medir as unidades, como é efetuado para obtenção do gráfico \bar{X} . Na Tabela 3, o $np_{x(I)}^\mu$ apresentou valores de ARL_1 até 15% menores em relação ao valor de ARL_1 obtido para o gráfico \bar{X} (com tamanho de amostra $n_{\bar{X}} = 3$). Também é notado nos casos em que o tamanho da mudança $\delta = \{0,25; 0,50\}$ o gráfico de controle $np_{x(I)}^\mu$ proporcionou uma redução no número médio de amostras até o sinal de uma condição fora de controle, ARL_1 , aproximadamente de 4 amostras (para $\delta = 0,25$) e 2 amostras (para $\delta = 0,50$), em comparação com os valores de ARL_1 obtidos para o gráfico \bar{X} .

Para fazer a comparação com o gráfico \bar{X} (usando um tamanho de amostra de 6 unidades), selecionamos também cinco pares de n_a e n_b : a) $n_a = 10, n_b = 2$; b) $n_a = 11, n_b = 1$; c) $n_a = 10, n_b = 3$; d) $n_a = 11, n_b = 2$; e e) $n_a = 12, n_b = 1$. Após a busca, foram obtidos um total de 18567 casos atendem à condição do valor de ARL_0 de aproximadamente 370,4 e entre esses casos, dois casos foram selecionados para competir com o gráfico de controle \bar{X} : Caso 3: $n_a = 11, n_b = 2$ com $z_a = 0,720; z_b = 2,400, UCL_{n_a} = 6; UCL_{n_b} = 1$; e Caso 4: $n_a = 12, n_b = 1$ com $z_a = 0,390; z_b = 2; UCL_{n_a} = 8; UCL_{n_b} = 1$. cujos resultados também estão na Tabela 3 (no segundo bloco de colunas). O gráfico de controle $np_{x(I)}^\mu$ apresentou valores de ARL_1 até 11% menores em relação ao valor de ARL_1 obtido para o gráfico \bar{X} (com tamanho de amostra $n_{\bar{X}} = 6$), para tamanhos da mudança $\delta = \{0,25; 0,50\}$, produzindo uma redução média aproximada de 6 amostras (para $\delta = 0,25$) e 2 amostras (para $\delta = 0,50$).

E, finalmente, para comparar \bar{X} usando $n_{\bar{X}} = 9$ unidades, os seguintes tamanhos para n_a e n_b são escolhidos: a) $n_a = 15$ e $n_b = 4$; b) $n_a = 16$ e $n_b = 3$; c) $n_a = 17$ e $n_b = 2$ caso 5; d) $n_a = 18$ e $n_b = 1$ caso 6; e e) $n_a = 17$ e $n_b = 1$. Um total de 31673 casos que atendem à condição do valor ARL_0 de aproximadamente 370,4 são encontrados após a pesquisa. Como nos cenários anteriores, dois casos são selecionados. Caso 5: $n_a = 17; n_b = 2; z_a = 0,475; z_b = 2,280; UCL_{n_a} = 10; UCL_{n_b} = 1$ e Caso 6: $n_a = 18; n_b = 1; z_a = 0,675; z_b = 0,500; UCL_{n_a} = 9; UCL_{n_b} = 1$. Os resultados estão na Tabela 3. Novamente podemos observar uma redução de ARL para tamanhos da mudança pequenos.

Configurações adicionais do gráfico de controle $np_{x(I)}^\mu$ são mostradas na Tabela 4 para os tamanhos de amostra praticados mais comuns com $n_{\bar{X}} = 2, 3, 4, 5, 6$ para tamanhos de mudança $\delta = \{0,25, 0,50, 0,75\}$ para dar suporte aos praticantes. Esses planos podem competir com o gráfico \bar{X} , com apenas um pequeno aumento em relação ao tamanho médio da amostra. Porém o gráfico de controle $np_{x(I)}^\mu$ apresenta um resultado superior mesmo quando comparada ao gráfico de controle \bar{X} . Essa é uma característica muito

Tabela 3 – Valores de ARL_1 dos gráficos de controle: \bar{X} , np_x e np_x^μ - Casos 1, 2, 3, 4, 5 e 6: $n_{\bar{X}} = 3, 6, 9$.

δ	Caso 1		Caso 2		Caso 3		Caso 4		Caso 5		Caso 6	
	\bar{X}	np_x	np_x^μ	np_x	np_x^μ	\bar{X}	np_x	np_x^μ	\bar{X}	np_x	np_x^μ	np_x^μ
0.25	106.287	112.543	104.014	102.957	66.614	66.621	64.565	60.959	47.463	45.543	45.811	43.762
0.50	36.134	38.911	35.704	34.569	16.754	16.219	16.622	15.459	10.011	9.124	10.090	9.413
0.75	14.488	15.411	14.763	13.931	5.803	5.406	6.083	5.719	3.363	2.980	3.680	3.429
1.00	6.810	7.031	7.238	6.685	2.705	2.461	3.043	2.929	1.706	1.529	2.066	1.969
1.25	3.723	3.710	4.140	3.788	1.639	1.496	2.001	1.975	1.200	1.123	1.610	1.587
1.50	2.342	2.264	2.721	2.513	1.229	1.151	1.627	1.639	1.045	1.019	1.494	1.510
1.75	1.671	1.588	2.020	1.926	1.071	1.036	1.498	1.532	1.007	1.002	1.457	1.501
2.00	1.329	1.260	1.655	1.661	1.017	1.006	1.446	1.506	1.001	1.000	1.424	1.500
2.25	1.153	1.104	1.455	1.552	1.003	1.001	1.404	1.501	1.000	1.000	1.381	1.500
2.50	1.065	1.036	1.334	1.514	1.000	1.000	1.354	1.500	1.000	1.000	1.328	1.500
2.75	1.024	1.010	1.250	1.503	1.000	1.000	1.297	1.500	1.000	1.000	1.268	1.500
3.00	1.008	1.002	1.184	1.500	1.000	1.000	1.237	1.500	1.000	1.000	1.208	1.500
Tamanho da amostra	$n_{\bar{X}} = 3$	$n_{np_x} = 6$	$n_a = 5$ $n_b = 2$	$n_a = 6$ $n_b = 1$	$n_{\bar{X}} = 6$	$n_{np_x} = 12$	$n_a = 11$ $n_b = 2$	$n_a = 12$ $n_b = 1$	$n_{\bar{X}} = 9$	$n_{np_x} = 18$	$n_a = 17$ $n_b = 2$	$n_a = 18$ $n_b = 1$
UCL	$UCL_{\bar{X}} = 1.606$	$UCL_{np} = 1$	$UCL_{n_a} = 3$	$UCL_{n_b} = 2$	$UCL_{\bar{X}} = 1.136$	$UCL_{np} = 3$	$UCL_{n_a} = 6$	$UCL_{n_a} = 8$	$UCL_{\bar{X}} = 0.927$	$UCL_{np} = 5$	$UCL_{n_a} = 10$	$UCL_{n_a} = 9$
Limite discriminante	-	$w_u = 2.207$	$z_a = 0.885$ $z_b = 2.165$	$z_a = 1.490$ $z_b = 0$	-	$w_u = 1.620$	$z_a = 0.720$ $z_b = 2.400$	$z_a = 0.390$ $z_b = 2.000$	-	$w_u = 1.378$	$z_a = 0.475$ $z_b = 2.280$	$z_a = 0.675$ $z_b = 0.500$

Tabela 4 – Configurações adicionais do gráfico $np_{x(I)}^\mu$ para $\delta = 0.25, 0.50, 0.75$

δ	\bar{X}		np_x		n_a	n_b	$np_{x(I)}^\mu$		z_a	z_b	ASS	$ARL_{1 np_x}$
	$n_{\bar{X}}$	$ARL_{1\bar{X}}$	n_{np_x}	ARL_{1np_x}			UCL_{n_a}	UCL_{n_b}				
0.25	2	131.949	4	107.414	4	1	2	1	0.61	0	2.5	119.341
						5	1	4	1	0.38	0	3
	3	106.287	6	85.544	6	1	2	1	1.49	0	3.5	102.957
						7	1	4	0	0.865	2.99	4
	4	88.966	8	72.018	7	2	4	1	0.82	2.49	4.5	86.678
						8	2	5	1	0.64	2.445	5
5	76.316	10	60.165	9	2	5	1	0.765	2.54	5.5	74.078	
					10	2	6	1	0.62	2.365	6	68.913
6	66.614	12	52.312	12	1	8	1	0.39	0.5	6.5	60.959	
0.50	2	52.656	4	36.820	4	1	2	1	0.61	0	2.5	45.673
						5	1	4	1	0.38	0	3
	3	36.134	6	25.353	6	1	2	1	1.49	0	3.5	34.569
						7	1	4	0	0.865	2.99	4
	4	26.765	8	18.920	7	2	4	1	0.82	2.49	4.5	26.480
						8	2	5	1	0.64	2.445	5
5	20.814	10	14.412	9	2	5	1	0.765	2.54	5.5	20.594	
					10	2	6	1	0.62	2.365	6	18.460
6	16.754	12	11.609	12	1	8	1	0.39	0.5	6.5	15.459	
0.75	2	23.485	4	14.858	4	1	2	1	0.61	0	2.5	20.478
						5	1	4	1	0.38	0	3
	3	14.488	6	9.528	6	1	2	1	1.49	0	3.5	13.931
						7	1	4	0	0.865	2.99	4
	4	10.011	8	6.647	7	2	4	1	0.82	2.49	4.5	10.325
						8	2	5	1	0.64	2.445	5
5	7.432	10	4.964	9	2	5	1	0.765	2.54	5.5	7.720	
					10	2	6	1	0.62	2.365	6	6.858
6	5.803	12	3.937	12	1	8	1	0.39	0.5	6.5	5.719	

positiva, tendo em vista que não são feitas medições nas unidades, todos os itens são classificados, com a utilização de um dispositivo GO/ NO GO, por exemplo.

3.2 Exemplo numérico - $np_{x(I)}^\mu$

Nesta seção, um exemplo numérico é apresentado para ilustrar a abordagem proposta neste trabalho, referente a implementação do gráfico $np_{x(I)}^\mu$. Partindo do pressuposto de que a inspeção por atributos costuma ser mais rápida e mais barata quando comparada a uma inspeção por variáveis, neste exemplo os itens são avaliados por algum critério de classificação ou mesmo um dispositivo como um medidor GO / NO GO.

Portanto, adaptamos um exemplo de anéis de pistão forjados para motores automotivos citado por [Montgomery \(2009\)](#). Neste exemplo, implementamos o gráfico $np_{x(I)}^\mu$ com o objetivo de controlar o diâmetro interno dos anéis de pistão fabricados pelo processo usando tamanhos de amostra $n_a = 9$ e $n_b = 2$ (que produz $ASS = 5.5$). Esta configuração é selecionada a fim de obter um melhor desempenho que o gráfico \bar{X} com $n_{\bar{X}} = 5$, para um erro do tipo I $\alpha = 0.0027$, que produz $ARL_{1\bar{X}(\delta=0.25)} = 76.316$ vs $ARL_{1np_{x(I)}^\mu(\delta=0.25)} = 74.078$, para monitorar a média do processo. Algumas suposições adicionais são: os valores do diâmetro interno dos anéis do pistão são considerados independentes e seguem uma distribuição normal. Quando o processo está sob controle, os parâmetros são $\mu_0 = 74.001$ mm

e $\sigma_0 = 0.01007 \text{ mm}$. Os limites discriminantes padronizados são $z_a = 0.765$ e $z_b = 2.54$. Os limites de controle do gráfico $np_{x(I)}^\mu$ são $UCL_{n_a} = 5$ e $UCL_{n_b} = 1$.

A Tabela 5 ilustra o procedimento de avaliação para oito amostras extraídas da linha de produção de anéis de pistão (contendo 44 observações). Conforme mencionado antes, considerando desvios unilaterais da média do processo, se $(X_{k_i} - \mu_0)/\sigma_0 > z_k$ o item é classificado em não aprovado (N), caso contrário, é classificado em aprovado (A) com $z_k = (W_k - \mu_0)/\sigma_0$, o limite discriminante padronizado, (W_k , o limite discriminante não padronizado). Ao final da inspeção do tamanho da amostra n_k teremos Y_k , o número de itens não aprovados, $k = a, b$. Observe que as 43ª e 44ª observações são classificadas em não aprovadas, ambas as observações pertencem à 8ª amostra, então temos $Y_b = 2$ ($Y_k > UCL_{n_b}$). Esse resultado indica que o processo foi julgado como fora de controle, o que indica a necessidade de busca por causas especiais e realização de alguns ajustes no processo, se necessário.

Tabela 5 – Avaliação e decisão das amostras com uso do gráfico $np_{x(I)}^\mu$

Amostra	Avaliação									n_k	Y_k	Decisão
1	N	A	N	A	A	A	A	A	N	9	3	Sob controle
2	A	A								2	0	Sob controle
3	N	N	A	A	A	A	A	N	N	9	4	Sob controle
4	A	A								2	0	Sob controle
5	N	A	N	N	A	A	A	A	A	9	3	Sob controle
6	A	A								2	0	Sob controle
7	A	A	A	A	A	N	A	A	A	9	1	Sob controle
8	N	N								2	2	Fora de controle

4 Procedimento para o Gráfico de Controle $np_x^{\sigma^2}$ no monitoramento da variância

As características e procedimento de inspeção aplicado ao gráfico de controle $np_x^{\sigma^2}$ são similares ao apresentado anteriormente para o gráfico de controle np_x^{μ} (ver Fig. 2), exceto pelo fato que o gráfico $np_x^{\sigma^2}$ é aplicado para monitorar a variância, com foco em detectar mudanças com desvios unilaterais na variância do processo.

Por se tratar de um gráfico aplicado para monitorar a variância novas premissas são assumidas, a saber, a distribuição da característica de qualidade observada como Normal, sendo observações independentes, com média μ_0 e variância σ_0^2 conhecidas. Para este procedimento também assumimos que a média do processo se mantém inalterada. Na ocorrência de mudanças do processo, o valor da variância σ_0^2 é alterado para $\sigma_1^2 = \gamma^2 \sigma_0^2$, $\gamma > 1$, onde γ expressa a magnitude da mudança sobre a variância do processo (σ_0^2), nosso interesse está na detecção de desvios unilaterais da variância do processo.

Quando o processo está fora de controle, o desempenho do gráfico de controle $np_x^{\sigma^2}$ é avaliado através do valor de ARL_1 , conforme segue:

- Ao utilizar o procedimento empregado para o gráfico de controle $np_x^{\sigma^2}$

$$\begin{aligned} ARL_1 &= 0.5 \left[(1 - P_{B_1}) + \left(1 + \frac{1}{\pi_3 + \pi_4} \right) P_{B_1} \right] + 0.5 \left(\frac{1}{\pi_3 + \pi_4} \right) \\ &= \frac{2 + P_{A_1} + P_{B_1}}{2 - 2P_{A_1}P_{B_1}}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Para o gráfico de controle $np_x^{\sigma^2}$ os parâmetros são: o tamanho das amostras n_a e n_b , os limites de controle UCL_{n_a} e UCL_{n_b} , os limites discriminantes padronizados $|z_a|$ e $|z_b|$. Depois de escolhido o tamanho das amostras n_a e n_b , os limites de controle UCL_{n_a} e UCL_{n_b} e os limites discriminantes padronizados $|z_a|$ e $|z_b|$ são determinados por uma busca intensiva, tal que se obtenha parâmetros otimizados ao calcular o valor ARL_{0c} , para atingir um valor alvo de ARL_{0T} ($ARL_{0T} = 370.4$). Explicitamente, consiste em encontrar o vetor Θ_3 :

$$\Theta_3 = (z_a^o, z_b^o, UCL_{n_a}^o, UCL_{n_b}^o) = \arg(\min ARL_1) \quad (4.2)$$

Sujeito às restrições : $0 < z_i < 3.5, \quad i = a, b$
 $0 < UCL_{n_i} < n_i, \quad i = a, b$
 $|ARL_{0_c} - ARL_{0_T}| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon = 0.15.$

4.1 O desempenho do Gráfico de Controle $np_{x(I)}^{\sigma^2}$

Nesta seção, o desempenho do gráfico de controle por atributos $np_{x(I)}^{\sigma^2}$ é avaliado e comparado com o desempenho do gráfico de controle $np_x^{\sigma^2}$ e seu principal competidor, o gráfico S^2 , ambos os gráficos de controle configurados para ter um $ARL_{0_T} = 370.4$. Para obter os parâmetros do gráfico de controle $np_{x(I)}^{\sigma^2}$ foi desenvolvido um programa específico para este fim utilizando o software R, devido ao elevado número de configurações (de tamanhos de amostra, limites de controle, limites discriminante, etc). A busca forneceu potenciais candidatos, configurações que satisfazem à condição do valor ARL_0 de aproximadamente 370.4. Dentre elas, foram selecionadas algumas configurações ótimas que competem com o gráfico de controle S^2 . Os planos selecionados para avaliar a abordagem proposta nesta seção apresentam as seguintes características: (a) o tamanho da amostra do gráfico de controle S^2 tradicional é igual a $n_{S^2} = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 15\}$; (b) o tamanho da amostra n_{np_x} é menor (ou igual) ao dobro do tamanho da amostra n_{S^2} usado para o gráfico S^2 ($n_{np_x} \leq 2 \times n_{S^2}$); (c) o tamanho da amostra n_a é menor (ou igual) ao dobro do tamanho da amostra n_{S^2} usado para o gráfico S^2 , para produzir um tamanho médio das amostras (*Average Sample Size - ASS*) próximo ao tamanho de amostra usado para o gráfico S^2 ; (d) o desempenho para detectar pequenos desvios deve ser ao menos similar ao gráfico S^2 .

A Tabela 6 apresenta algumas configurações de planos para o gráfico $np_{x(I)}^{\sigma^2}$ que poderiam competir (ou seja, menores valores de ARL_1) com o gráfico de controle S^2 para tamanhos de amostra $n_{S^2} = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 15\}$, considerando tamanhos da mudança $\gamma = 1.10$ a 2.00, com incremento de 0.1. Os planos mostrados na Tabela 6 são aqueles (entre vários planos) que fornecem o menor tamanho de amostra, além de valores de ARL_1 mais baixos do que aqueles obtidos com o gráfico S^2 . Vários resultados interessantes podem ser observados nesta tabela:

- Similarmente ao gráfico $np_x^{\sigma^2}$, usando um pequeno tamanho médio da amostra de 3 unidades ($ASS = 3$), o gráfico $np_{x(I)}^{\sigma^2}$ tem desempenho que fornece ARL_1 inferior ao gráfico de controle S^2 (também com tamanho de amostra de 3 unidades) em todos os tamanhos de mudança (γ), contudo para este caso o gráfico $np_x^{\sigma^2}$ se apresenta como a melhor opção.

- Quando $n_{S^2} = 4$, o gráfico $np_{x(I)}^{\sigma^2}$ fornece melhor desempenho que o gráfico S^2 , com apenas um pequeno aumento em relação ao tamanho médio da amostra. Na comparação com gráfico $np_x^{\sigma^2}$, o desempenho do gráfico $np_{x(I)}^{\sigma^2}$ é superior (ou similar), isso com tamanho médio de amostras menores (redução média de 30%) comparados ao tamanho da amostra utilizado para o gráfico $np_x^{\sigma^2}$, o que pode ser visto como uma vantagem.
- Amostras igualmente maiores são necessárias para o gráfico de controle $np_{x(I)}^{\sigma^2}$ para obter melhor desempenho do que o gráfico de controle S^2 , mas a proporção entre o tamanho médio da amostra para o $np_{x(I)}^{\sigma^2}$ e o tamanho da amostra para o gráfico de controle S^2 está situada em torno de 1.2. Uma regra simples pode ser declarada: com uma adição de duas unidades ao tamanho da amostra praticado para o gráfico de controle S^2 , o gráfico de controle por atributos $np_{x(I)}^{\sigma^2}$ pode fornecer melhores resultados que o gráfico de controle por variáveis S^2 (isto é, $ASS = n_{S^2} + 2$). Uma vez que a inspeção por atributos é mais rápida e mais barata, o uso do gráfico de controle $np_{x(I)}^{\sigma^2}$ é economicamente mais viável, além de obter melhor desempenho.
- Como era esperado, os gráficos $np_x^{\sigma^2}$ e $np_{x(I)}^{\sigma^2}$ apresentam melhor desempenho na detecção de mudanças pequenas e moderadas na variância do processo.
- Ao comparar o desempenho de $np_x^{\sigma^2}$ e $np_{x(I)}^{\sigma^2}$ da Tabela 6, podemos observar que (em boa parte do casos) o primeiro tem melhor desempenho do que o último, mas o preço pago é o aumento no tamanho da amostra.
- E finalmente a possibilidade de usar uma única unidade (tamanho da amostra $n_b = 1$) para o gráfico de controle por atributos $np_{x(I)}^{\sigma^2}$ para monitorar a variância.

A Tabela 7 apresenta o desempenho do gráfico S^2 para um tamanho de amostra igual a quatro unidades, comparado aos gráficos de controle $np_x^{\sigma^2}$, $np_{x(I)}^{\sigma^2}$ e outros gráficos de controle por atributos encontrados na literatura usados para monitorar a variância. O objetivo desta tabela é confirmar o bom desempenho dos gráficos $np_x^{\sigma^2}$ e $np_{x(I)}^{\sigma^2}$, principalmente do $np_{x(I)}^{\sigma^2}$. Neste caso, o gráfico $np_{x(I)}^{\sigma^2}$ requer em média apenas uma unidade a mais do que o tamanho da amostra usado para gráfico de controle S^2 para obter um melhor desempenho.

4.2 Exemplo numérico - $np_{x(I)}^{\sigma^2}$

Nesta seção, um exemplo numérico é apresentado para ilustrar a implementação do gráfico $np_{x(I)}^{\sigma^2}$, neste exemplo os itens são avaliados por algum critério de classificação ou mesmo um dispositivo GO/NO GO.

Tabela 6 – Comparação do desempenho dos gráficos de controle: S^2 , $np_x^{\sigma^2}$ e $np_x^{\sigma^2(I)}$.

γ	S^2			ARL			S^2		
	S^2	$np_x^{\sigma^2}$	$np_x^{\sigma^2(I)}$	S^2	$np_x^{\sigma^2}$	$np_x^{\sigma^2(I)}$	S^2	$np_x^{\sigma^2}$	$np_x^{\sigma^2(I)}$
1.00	370.398	370.367	370.367	370.398	370.405	370.544	370.398	370.375	370.424
1.10	132.699	131.336	131.388	117.832	114.297	112.876	106.934	104.346	105.116
1.20	60.785	59.163	59.186	49.850	46.664	46.145	42.491	39.955	40.854
1.30	33.107	31.609	31.620	25.748	23.295	23.261	21.091	19.089	19.909
1.40	20.443	19.142	19.149	15.354	13.485	13.650	12.275	10.739	11.441
1.50	13.856	12.738	12.744	10.178	8.725	8.964	8.028	6.831	7.430
1.60	10.078	9.114	9.120	7.307	6.146	6.409	5.727	4.773	5.290
1.70	7.741	6.901	6.907	5.574	4.624	4.891	4.365	3.586	4.043
1.80	6.206	5.466	5.472	4.459	3.664	3.928	3.500	2.851	3.264
1.90	5.147	4.488	4.495	3.703	3.024	3.284	2.921	2.369	2.751
2.00	4.387	3.795	3.803	3.167	2.579	2.835	2.515	2.039	2.399
Tamanho da amostra	$n_{S^2} = 3$	$n_{np_x} = 3$	$ASS = 3.002$	$n_{S^2} = 4$	$n_{np_x} = 6$	$ASS = 5.010$	$n_{S^2} = 5$	$n_{np_x} = 8$	$ASS = 6.012$
\bar{UCL}	$\bar{UCL}_{S^2} = 5.915$	$\bar{UCL}_{np_x} = 0$	$\bar{UCL}_{np_x(I)} = 0$	$\bar{UCL}_{S^2} = 4.719$	$\bar{UCL}_{np_x} = 1$	$\bar{UCL}_{np_x(I)} = 2$	$\bar{UCL}_{S^2} = 4.063$	$\bar{UCL}_{np_x} = 0$	$\bar{UCL}_{np_x(I)} = 2$
Limite discriminante	-	$w_u = 3.320$	$z_a = 3.325$ $z_b = 3.31$	-	$w_u = 2.466$	$z_a = 2.04$ $z_b = 3.5$	-	$w_u = 3.460$	$z_a = 2.14$ $z_b = 3.355$
γ	S^2	$np_x^{\sigma^2}$	$np_x^{\sigma^2(I)}$	S^2	$np_x^{\sigma^2}$	$np_x^{\sigma^2(I)}$	S^2	$np_x^{\sigma^2}$	$np_x^{\sigma^2(I)}$
1.00	370.398	370.364	370.362	370.398	370.341	370.364	370.398	370.303	370.395
1.10	98.340	96.239	95.919	91.272	88.886	90.602	85.294	83.167	85.351
1.20	37.080	35.132	35.316	32.889	30.799	32.077	29.528	27.605	29.161
1.30	17.830	16.359	16.716	15.406	13.889	14.827	13.530	12.136	13.226
1.40	10.194	9.102	9.484	8.690	7.595	8.311	7.555	6.554	7.357
1.50	6.610	5.781	6.145	5.608	4.792	5.366	4.863	4.123	4.751
1.60	4.706	4.057	4.397	3.995	3.367	3.850	3.474	2.907	3.429
1.70	3.595	3.072	3.393	3.065	2.566	2.991	2.681	2.233	2.690
1.80	2.898	2.467	2.775	2.487	2.081	2.471	2.192	1.830	2.249
1.90	2.435	2.073	2.374	2.107	1.770	2.139	1.874	1.575	1.973
2.00	2.114	1.805	2.103	1.846	1.561	1.918	1.656	1.407	1.793
Tamanho da amostra	$n_{S^2} = 6$	$n_{np_x} = 10$	$ASS = 7.515$	$n_{S^2} = 7$	$n_{np_x} = 12$	$ASS = 8.517$	$n_{S^2} = 8$	$n_{np_x} = 14$	$ASS = 9.52$
\bar{UCL}	$\bar{UCL}_{S^2} = 3.641$	$\bar{UCL}_{np_x} = 2$	$\bar{UCL}_{np_x(I)} = 3$	$\bar{UCL}_{S^2} = 3.344$	$\bar{UCL}_{np_x} = 2$	$\bar{UCL}_{np_x(I)} = 3$	$\bar{UCL}_{S^2} = 3.121$	$\bar{UCL}_{np_x} = 2$	$\bar{UCL}_{np_x(I)} = 3$
Limite discriminante	-	$w_u = 2.1734$	$z_a = 1.945$ $z_b = 3.405$	-	$w_u = 2.2512$	$z_a = 2.01$ $z_b = 3.36$	-	$w_u = 2.3144$	$z_a = 2.06$ $z_b = 3.405$
γ	S^2	$np_x^{\sigma^2}$	$np_x^{\sigma^2(I)}$	S^2	$np_x^{\sigma^2}$	$np_x^{\sigma^2(I)}$	S^2	$np_x^{\sigma^2}$	$np_x^{\sigma^2(I)}$
1.00	370.398	370.465	370.455	370.398	370.501	370.485	370.398	370.404	370.384
1.10	80.136	77.533	79.864	75.618	75.098	75.580	59.183	58.511	58.957
1.20	26.763	24.810	26.435	24.445	23.568	24.071	16.829	16.117	16.801
1.30	12.035	10.743	11.837	10.815	10.100	10.564	7.051	6.556	7.124
1.40	6.668	5.790	6.573	5.959	5.423	5.829	3.852	3.514	3.979
1.50	4.290	3.663	4.268	3.838	3.433	3.796	2.530	2.290	2.701
1.60	3.077	2.609	3.113	2.767	2.454	2.792	1.890	1.713	2.108
1.70	2.391	2.028	2.476	2.166	1.918	2.248	1.544	1.411	1.813
1.80	1.972	1.683	2.102	1.802	1.602	1.934	1.344	1.243	1.660
1.90	1.701	1.467	1.872	1.569	1.405	1.745	1.222	1.145	1.581
2.00	1.517	1.325	1.726	1.412	1.277	1.627	1.145	1.087	1.541
Tamanho da amostra	$n_{S^2} = 9$	$n_{np_x} = 16$	$ASS = 11.024$	$n_{S^2} = 10$	$n_{np_x} = 17$	$ASS = 12.026$	$n_{S^2} = 15$	$n_{np_x} = 26$	$ASS = 17.043$
\bar{UCL}	$\bar{UCL}_{S^2} = 2.947$	$\bar{UCL}_{np_x} = 3$	$\bar{UCL}_{np_x(I)} = 3$	$\bar{UCL}_{S^2} = 2.806$	$\bar{UCL}_{np_x} = 3$	$\bar{UCL}_{np_x(I)} = 4$	$\bar{UCL}_{S^2} = 2.371$	$\bar{UCL}_{np_x} = 5$	$\bar{UCL}_{np_x(I)} = 5$
Limite discriminante	-	$w_u = 2.0718$	$z_a = 2.095$ $z_b = 2.475$	-	$w_u = 2.0987$	$z_a = 1.965$ $z_b = 3.39$	-	$w_u = 1.9105$	$z_a = 1.96$ $z_b = 0.50$

Tabela 7 – Comparando gráficos de controle para monitorar a variância

γ	S^2	np_{S^2}	G_{S^2}	$np_x^{\sigma^2}$	$np_x^{\sigma^2(I)}$
1.10	117.829	114.290	113.330	114.297	112.876
1.20	49.850	46.660	46.880	46.664	46.145
1.50	10.178	8.720	9.010	8.725	8.964
2.00	3.167	2.560	2.700	2.579	2.835
Tamanho da Amostra	$n_{S^2} = 4$	$n_{np_{S^2}} = 6$	$n_{G_{S^2}} = 7$	$n_{np_x} = 6$	$ASS = 5.010$ $n_a = 9$ $n_b = 1$

Com este intuito, adaptamos um exemplo de anéis de pistão forjados para motores automotivos citado por Montgomery (2009). Neste exemplo, implementamos o gráfico $np_{x(I)}^{\sigma^2}$ com o objetivo de monitorar o valor da variância do diâmetro interno dos anéis de pistão fabricados pelo processo usando tamanhos de amostra $n_a = 11$ e $n_b = 1$ (produzindo $ASS = 6.012$). Esta configuração é selecionada a fim de obter um melhor desempenho para o gráfico S^2 com $n_{S^2} = 5$ para um erro do tipo I $\alpha = 0.0027$, que produz $ARL_1 = 106.934$ vs $ARL_1 = 105.116$, referentes aos gráficos S^2 e $np_{x(I)}^{\sigma^2}$, respectivamente, ambos para um tamanho da mudança $\gamma = 1.10$ para monitorar a variância. Algumas suposições adicionais são: os valores do diâmetro interno dos anéis do pistão são considerados independentes e seguem uma distribuição normal. Quando o processo está sob controle, os parâmetros são $\mu_0 = 74.001 \text{ mm}$ e $\sigma_0 = 0.01007 \text{ mm}$. Os limites discriminantes padronizados são $z_a = 2.14$ e $z_b = 3.355$. Os limites de controle do gráfico $np_{x(I)}^{\sigma^2}$ são $UCL_{n_a} = 2$ e $UCL_{n_b} = 0$.

A Tabela 8 ilustra o procedimento de avaliação para oito amostras extraídas da linha de produção de anéis de pistão (contendo 44 observações). Se $(X_{k_i} - \mu_0)/\sigma_0 > |z_k|$ o item é classificado em não aprovado (N), caso contrário, é classificado em aprovado (A) com $z_k = (W_k - \mu_0)/\sigma_0$, o limite discriminante padronizado, (W_k , o limite discriminante não padronizado). Ao final da inspeção do tamanho da amostra n_k teremos Y_k , o número de itens não aprovados, $k = a, b$. Observe que a 44ª observação é classificada em não aprovada, esta observação pertence à 8ª amostra, cujo limite de controle é igual a zero, então temos $Y_b = 1$ ($Y_k > UCL_{n_b}$). Este resultado indica que o processo é julgado como fora de controle, o que sinaliza a necessidade de se iniciar a busca por causas especiais e realizar alguns ajustes no processo, se necessário, para o retorno de uma condição sob controle.

Tabela 8 – Avaliação e decisão das amostras com uso do gráfico $np_{x(I)}^{\sigma^2}$

Amostra	Avaliação										n_k	Y_k	Decisão	
1	A	A	N	A	A	A	A	A	A	A	N	11	2	Sob controle
2	A											1	0	Sob controle
3	A	A	A	A	A	A	A	A	A	N	A	11	1	Sob controle
4	A											1	0	Sob controle
5	N	A	A	N	A	A	A	A	A	A	A	11	2	Sob controle
6	A											1	0	Sob controle
7	A	A	A	A	A	N	A	A	A	A	N	11	2	Sob controle
8	N											1	1	Fora de controle

5 Conclusão

Muitas organizações têm empregado técnicas para melhoria contínua de seus processos e da qualidade percebida em seus produtos e/ou serviços, tais como os gráficos de controle. Neste contexto, gráficos de controle que façam uso de procedimentos mais rápidos, mais baratos e com bom desempenho, têm sido propostos. Este trabalho apresenta novas propostas de gráficos de controle por atributos, o gráfico $np_x^{\sigma^2}$ para monitorar a variância do processo, bem como os gráficos de controle $np_{x(I)}^\mu$ e $np_{x(I)}^{\sigma^2}$ para monitorar, respectivamente, a média e a variância do processo.

De acordo com os resultados apresentados neste trabalho foi possível concluir que uma vez realizada a seleção otimizada de parâmetros para classificação de itens, temos uma sinalização antecipada utilizando gráfico de controle por atributos $np_x^{\sigma^2}$, de modo a competir com o gráfico S^2 . O procedimento adotado para o gráfico $np_x^{\sigma^2}$, proposto neste trabalho, forneceu melhor desempenho comparado ao gráfico S^2 , especialmente para tamanhos de amostra menores, para tamanho de amostra $n_{S^2} = 3$, o gráfico $np_x^{\sigma^2}$, notavelmente não requer aumento no tamanho da amostra para apresentar um desempenho superior ao obtido com o gráfico S^2 , para tamanhos de amostra $n_{S^2} = 4, 5, 6$ requer um pequeno aumento no tamanho da amostra, (incremento médio de aproximadamente 60%), fornecendo melhor desempenho em todas as faixas de mudanças (γ de 1.10 a 2.00) na variância do processo. O gráfico $np_x^{\sigma^2}$ proposto oferece vantagens sobre o gráfico S^2 no que tange a custo, tempo, simplicidade e/ou em cenários onde se faz o uso de ensaios destrutivos, demandando menor expertise para realização das inspeções, pois não requer instrumentos complexos de medição, de fato não há medições no procedimento, os itens são classificados com um dispositivo GO/NO GO, por exemplo.

Além disso, os resultados apresentados neste trabalho acentuam a potencialidade do gráfico de controle $np_{x(I)}^\mu$ no monitoramento da média do processo. O gráfico de controle $np_{x(I)}^\mu$ provou ser muito competitivo, pois apresentou um desempenho superior (em termos de ARL_1) quando comparado ao gráfico de controle np_x , empregando um tamanho médio de amostra menor do que o usado para o gráfico de controle np_x , na ocorrência de pequenas a moderadas mudanças na média do processo ($\delta < 2$). Ainda mais, o gráfico de controle $np_{x(I)}^\mu$ apresentou um desempenho semelhante ou até superior (em termos de ARL_1) quando comparado ao gráfico de controle \bar{X} em tamanhos de mudança pequenos ($\delta = 0, 50$), empregando um tamanho de amostra médio ligeiramente superior ao usado para o gráfico de controle \bar{X} .

Similarmente o gráfico de controle $np_{x(I)}^{\sigma^2}$ apresentou um melhor desempenho (em termos de ARL_1) quando comparado ao gráfico de controle S^2 . O gráfico de controle $np_{x(I)}^{\sigma^2}$

se mostrou uma boa alternativa ao gráfico de controle por variáveis S^2 para monitorar a variância, em especial, em tamanhos de mudança pequenos a moderados da variância do processo. Isso com apenas um pequeno aumento no tamanho médio da amostra ao usado para o gráfico de controle S^2 .

Portanto, na aplicação dos gráficos de controle propostos, $np_x^{\sigma^2}$, $np_{x(I)}^{\mu}$ e $np_{x(I)}^{\sigma^2}$, é relevante enfatizar que nenhuma medição é feita nos itens amostrados. Estes são classificados em não aprovados ou aprovados usando um dispositivo GO/NO GO, por exemplo. Em síntese, os gráficos de controle $np_x^{\sigma^2}$, $np_{x(I)}^{\mu}$ e $np_{x(I)}^{\sigma^2}$ propostos provaram ser competitivos, ao se apresentar como boas alternativas aos tradicionais gráficos \bar{X} e S^2 , no monitoramento da média e da variância, respectivamente, dadas as vantagens quanto a custo, tempo de inspeção e simplicidade, em especial, em cenários onde ensaios destrutivos são utilizados.

Referências

- APARISI, F.; EPPRECHT, E.; MOSQUERA, J. Statistical process control based on optimum gages. Quality and Reliability Engineering International, v. 34, p. 2–14, 2018. Citado na página 17.
- BEZERRA, E. L.; HO, L. L.; QUININO, R. C. G_{S2} : An optimized attribute control chart to monitor process variability. International Journal of Production Economics, v. 195, p. 287–295, 2018. Citado na página 18.
- CHIU, W. K. Economic design of attribute control charts. Technometrics, v. 17, p. 81–87, 1975. Citado na página 24.
- COSTA, A. F. B. \bar{X} charts with variable sample size. Journal of Quality Technology, v. 26:3, p. 155–163, 1994. Citado 3 vezes nas páginas 10, 14 e 15.
- DAUDIN, J. J. Double sampling \bar{X} charts. Journal of Quality Technology, v. 24 (2), p. 78–87, 1992. Citado na página 14.
- EPPRECHT, E.; COSTA, A. F. B.; MENDES, F. Adaptive control charts for attributes. IIE Transactions, v. 35:6, p. 567–582, 2003. Citado na página 15.
- HO, L. L.; QUININO, R. C. An attribute control chart for monitoring the variability of a process. International Journal of Production Economics, v. 45, p. 263–267, 2013. Citado na página 18.
- KENNEDY, C. W.; HOFFMAN, E. G.; BOND, S. D. Inspection and gaging. New York: Industrial Press Inc, 1987. 215-216 p. Citado na página 24.
- KOOLI, I.; LIMAM, M. Economic design of an attribute np control chart using a variable sample size. Sequential Analysis, v. 30:2, p. 145–159, 2011. Citado na página 16.
- MONTGOMERY, D. C. Introduction to Statistical Quality Control. 6. ed. USA: John Wiley & Sons, Inc., 2009. Citado 6 vezes nas páginas 10, 12, 20, 27, 32 e 38.
- MOSQUERA, J.; APARISI, F. Optimal double sampling control chart based on gauges. Quality Engineering, v. 32:4, p. 693–704, 2020. Citado na página 17.
- PRABHU, S. S.; RUNGER, G. C.; KEATS, J. B. \bar{X} chart with adaptive sample sizes. International Journal of Production Research, v. 31:12, p. 2895–2909, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 15.
- QUININO, R. C.; BESSEGATO, L. F.; CRUZ, F. R. B. An attribute inspection control chart for process mean monitoring. International Journal of Advanced Manufacturing Technology, v. 90(9):, p. 2991–2999, 2017. Citado na página 13.
- QUININO, R. C. et al. A control chart to monitor the process mean based on inspecting attributes using control limits of the traditional x-bar chart. Journal of Statistical Computation and Simulation, v. 90(9):, p. 1639–1660, 2020. Citado na página 13.

QUININO, R. C.; HO, L. L.; TRINDADE, A. L. G. Monitoring the process mean based on attribute inspection when a small sample is available. Journal of the Operational Research Society, v. 66(11):, p. 1860–1867, 2015. Citado na página 13.

RODRIGUES, A. A. D. A.; EPPRECHT, E.; MAGALHÃES, M. S. D. Double-sampling control charts for attributes. Journal of Applied Statistics, v. 38(1):, p. 87–112, 2011. Citado na página 15.

SAMPAIO, E. S.; HO, L. L.; MEDEIROS, P. G. A combined $np_x-\bar{X}$ control chart to monitor the process mean in a two-stage sampling. Quality and Reliability Engineering International, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 7 e 13.

SLACK, N.; CHAMBERS, S.; JOHNSTON, R. Administração da produção. 2nd. ed. São Paulo: Atlas, 2002. Citado na página 10.

WU, Z. et al. An np control chart for monitoring the mean of a variable based on an attribute inspection. International Journal of Production Economics, v. 121, p. 141–147, 2009. Citado 5 vezes nas páginas 11, 12, 18, 19 e 28.

Apêndices

APÊNDICE A - Congresso XXVI IJCIEOM 2020



CERTIFICATE

INTERNATIONAL JOINT CONFERENCE ON INDUSTRIAL ENGINEERING AND OPERATIONS MANAGEMENT

This certificate is awarded to

Leandro Alves da Silva

for the following activities:

- Participant - Leandro Alves da Silva
- Paper presentation - Improving the performance of the attribute chart npx. Leandro Alves da Silva, Linda Lee Ho, Roberto Costa Quinino

A. MÁRCIO T. THOMÉ

Conference Chair

RAFAEL G. BARBASTEFANO

Conference Co-Chair



APÊNDICE B - Congresso SBPO-2021

**LIII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional | Trabalho APROVADO | LIII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional**

Prezado(a) Leandro Alves da Silva,

Parabéns!

Temos o prazer em informar que seu trabalho intitulado "MONITORAMENTO DA VARIABILIDADE BASEADA EM INSPEÇÕES POR ATRIBUTOS: EXPLORANDO AS CARACTERÍSTICAS DO GRÁFICO DE CONTROLE npx" foi aprovado para ser apresentado no LIII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional.

Você pode visualizar comentários em sua área de usuário: .

Solicitamos que editem sua submissão para incluírem os nomes dos autores na primeira página completa (título, autores, resumo e abstract), respeitando rigorosamente as normas de formatação dos anais do evento. Caso existam sugestões dos revisores, favor as incluírem se possível, porém somente altere o que tiver sido solicitado na revisão. Caso o arquivo submetido já esteja no formato requerido e sem recomendações de ajustes, realize somente a inclusão das informações dos autores.

Sua submissão deve ser editada impreterivelmente até **dia 27 de agosto de 2021**.

Atenciosamente,

Luiz Satoru Ochi
Comitê Científico | LIII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional

Este email foi enviado para leandro_silva@usp.br.

Por que recebi este email?

LIII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional usa Galoá

Saiba mais sobre o Galoá

APÊNDICE C - ENBIS-21 Online Conference - Abstract Acceptance

[Indico] ENBIS-21 Online Conference: Abstract Acceptance notification (#21) Externa

para robertoquinino, lindalee, mim

qui., 15 de jul. 19:37

Desativar para: inglês

inglês > português Traduzir mensagem

Dear Leandro Alves da Silva,

We're pleased to announce that your abstract "Attribute-Variable Alternating Inspection (AVA): The use of $\$np_x\text{-}\$v\text{\$}$ mixed control chart in monitoring the process variance" with ID #21 has been accepted for the oral presentation at ENBIS-21 Online Conference in track "".

Registration will be possible for a 50 euro fee; we'll inform you when registration opens.

See below a summary of your submitted abstract:
Conference: ENBIS-21 Online Conference
Submitted by: Leandro Alves da Silva
Title: Attribute-Variable Alternating Inspection (AVA): The use of $\$np_x\text{-}\$v\text{\$}$ mixed control chart in monitoring the process variance
Primary Authors: Leandro Alves da Silva, Linca Lee Ho, Roberto Costa Quinino
Co-authors:
Track classification:
Presentation type: Oral

For a more detailed summary please visit the page of your abstract:
<https://conferences.enbis.org/event/11/abstracts/92/>

We're looking forward to seeing you online!

Biagio Palumbo
ENBIS-21 Online Program Committee Chair

APÊNDICE D - ENBIS-21 Online Conference - Certificate

**ENBIS-21 ONLINE, SEPTEMBER 13-15, 2021**

Mr. Leandro Alves da Silva
Universidade de São Paulo

September 15, 2021

Mr. Leandro Alves da Silva,

this is to certify your presentation titled *Attribute-Variable Alternating Inspection (AVAI): The use of np_x-S^2 mixed control chart in monitoring the process variance* by Leandro Alves da Silva, Linda Lee Ho and Roberto Costa Quinino at the 21st Annual Conference of the European Network for Business and Industrial Statistics (ENBIS, www.enbis.org) organized Online from 13th to 15th September 2021.

Yours sincerely,

Biagio Palumbo
on behalf of the Program Committee

APÊNDICE E - Artigo submetido QRE-21-0247 (em avaliação)

Quality and Reliability Engineering International

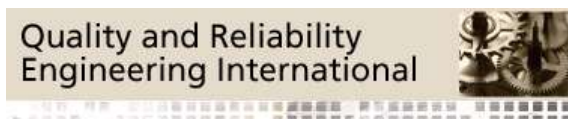
**An approach for improvements on the attribute npx control chart**

Journal:	<i>Quality and Reliability Engineering International</i>
Manuscript ID	QRE-21-0247
Wiley - Manuscript type:	Research Article
Date Submitted by the Author:	28-Apr-2021
Complete List of Authors:	Silva, Leandro; Universidade de São Paulo, Production Engineering Lee Ho, Linda; Universidade de Sao Paulo, Production Engineering Quinino, Roberto; Federal University of Minas Gerais, Statistics
Keywords:	Control charts, Process monitoring and control, Management
Additional Keywords:	Variable and Attribute Inspection, Monitoring the Process Mean, Variable Sample Size, Average sample size, Average Run Length

SCHOLARONE™
Manuscripts

APÊNDICE F - Artigo aceito QRE-21-0441

Quality and Reliability Engineering International



The use of npx -type attribute charts to monitor the variance

Journal:	<i>Quality and Reliability Engineering International</i>
Manuscript ID	QRE-21-0441
Wiley - Manuscript type:	Research Article
Date Submitted by the Author:	06-Jul-2021
Complete List of Authors:	Silva, Leandro; Universidade de Sao Paulo Departamento de Engenharia de Producao Lee Ho, Linda; Universidade de Sao Paulo Departamento de Engenharia de Producao Quinino, Roberto; Universidade Federal de Minas Gerais
Subject Area:	Process monitoring and control, Control charts, Statistical quality control
Keywords:	Variable and Attribute Inspection, Monitoring the Process Variance, Simplified Variable Sample Size, Average Sample Size, Average Run Length

SCHOLARONE™
Manuscripts